Ein elementares Modell für reinen Internverkehr zwischen endlich vielen Teilnehmern

Von Georg Daisenberger und Rudolf Nocker, VDE/NTG

Mitteilung aus dem Geschäftsbereich Fernsprechtechnik und aus den Forschungslaboratorien der Siemens AG, München

Ein elementares Modell für reinen Internverkehr zwischen endlich vielen Teilnehmern

Kurzfassung — Es wird der Fall des reinen Internverkehrs zwischen endlich vielen Teilnehmern bei voller Erreichbarkeit der Verbindungswege an einem einfachen Modell behandelt. Die Verkehrsgrößen werden berechnet. Der Verlust wird nach seinen verschiedenen möglichen Entstehungsursachen spezifiziert. Unter den genannten Voraussetzungen sind die angegebenen Beziehungen auch für kleinste Teilnehmeranzahlen gültig. Ein aktueller Anwendungsfall liegt bei der Bemessung der Sprechkreisanzahl in einem Nachrichtensystem mit dezentraler Vermittlungstechnik und Vielfachzugriff zu den vorhandenen Sprechkreisen vor.

An elementary model for purely internal traffic between a finite number of subscribers

Abstract — The case of purely internal traffic between a finite number of subscribers with full availability of the connecting paths is treated in terms of a simple model. The traffic parameters are calculated. The loss is specified in terms of its possible causes. Under the stated conditions, the relations quoted are also valid for a very small number of subscribers. A topical application of this work is the calculation of the number of speech circuits required in a communications system with decentralized switching and with multiple access to the speech circuits.

1. Einführung

Der Verkehr einer Teilnehmergruppe besteht aus Internverkehr (Verkehr untereinander) und Externverkehr (Verkehr mit Teilnehmern außerhalb der Gruppe). Hier wird ein Modell betrachtet, in dem M Teilnehmer über N voll erreichbare Verbindungswege (im weiteren kurz: Abnehmer) nur untereinander zu vermitteln sind.

Als anschauliches Beispiel hierfür diene eine Handvermittlung für M Teilnehmer mit N Verbindungsschnüren; *Bild 1.* Ein aktueller Anwendungsfall ist gegeben bei einem Nachrichtensystem mit dezentraler Vermittlungstechnik. Anstelle der N Verbindungsschnüre sind N Sprechkreise vorgesehen, die jeder Teilnehmer im Vielfachzugriff erreichen kann.

Unter Berücksichtigung von Extern- und Internverkehr und aller hemmenden Einflüsse, die bei Systemen mit zentraler Vermittlungstechnik und mehrstufigen Koppelnetzen auftreten können, ist in [1, 2] ein — notwendigerweise sehr komplexes — Modell entwickelt worden. Aufgrund einer anderen Zielsetzung dieses Modells läßt sich dieses jedoch nicht ganz auf den hier interessierenden Spezialfall des reinen Internverkehrs bei kleinen Teilnehmerzahlen vereinfachen.

Zwischen M Teilnehmern sind bei reinem Internverkehr nur $\mathrm{int}(M/2)$ Verbindungen gleichzeitig möglich ($\mathrm{int}(M/2)$ = größte ganze Zahl $\leq M/2$). Ein einfallender Ruf kann wegen Mangel an Abnehmern oder/und Belegtzustand des gerufenen Teilnehmers zu Verlust gehen. Im Fernsprechnetz wird ein Verlust infolge Belegtzustand des gerufenen Teilnehmers jedoch nicht zur Beurteilung der Verkehrsgüte herangezogen, weil er nicht von einer ggfs. mangelhaften Bemessung der Abnehmer herführt. Deshalb ist der durch beide Verlustursachen bedingte Gesamtverlust als Bemessungsgrundlage nicht realitätsgerecht.

Im folgenden wird die Verteilung der Anzahl gleichzeitig bestehender Verbindungen — auch unter der Bedingung, daß gerade ein Ruf einfällt — entwickelt. Die Beziehungen zwischen dem Angebot (A), der Belastung der Abnehmer (y) und dem Verlust (B) werden aufgezeigt. Der Verlust wird nach seinen verschiedenen möglichen Entstehungsursachen spezifiziert. Besondere Beachtung findet hierbei der Verlust „wegen echten Abnehmermangels ($BLTN$)", definiert als derjenige Anteil von B, der durch Abnehmermangel bei gleichzeitig freiem gerufenen Teilnehmer entsteht (Erklärung der gewählten Abkürzungen siehe Anhang A1). Dieser Anteil von B ist als ein Maß für die Beurteilung der Verkehrsgüte eines Verlustsystems bei reinem Internverkehr geeignet. Im Anhang A2 ist angegeben, wie $BLTN$ rekursiv berechnet werden kann.

Die entwickelten Beziehungen gelten unter den in Abschnitt 3. genannten Voraussetzungen auch für kleinste Teilnehmeranzahlen. So ergeben sich beispielsweise für den Extremfall $M = 2$, $N = 1$ die Verhältnisse bei der ungestörten Kommunikation zwischen zwei Teilnehmern. Läßt man dagegen M bei konstant gehaltenem Gesamtangebot unbegrenzt wachsen, so wird der Einfluß belegter Teilnehmer vernachlässigbar. Die angegebenen Formeln gehen dann in die entsprechenden Beziehungen für reinen Poissonverkehr (Erlang-Modell) über. $BLTN$ geht in die Erlang'sche Verlustformel über. Näherungsweise wird zur Vereinfachung der Planung meist Poissonverkehr unterstellt.

2. Schreibweise

X	Zufallsvariable „Anzahl der bestehenden Verbindungen"
X_j	Ereignis ($X = j$), d. h. „j Verbindungen bestehen" bzw. „j Abnehmer belegt"
T	Ereignis „gerufener Teilnehmer belegt"
R	Ereignis „Rufeinfall in einem kleinen Zeitintervall $(t, t + \Delta t)$"
$\bar{V}$	bedeutet: nicht V
VW	bedeutet: $V \cap W$
$P\{\ \}$	Wahrscheinlichkeit des angegebenen Ereignisses
P_j	$P\{X_j\}$
$P\{V \mid W\}$	Bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis V unter der Bedingung W
$\ldots^{(N)}$	... bei N Abnehmern

3. Voraussetzungen

— Es gibt nur Internverkehr. Es wird deshalb $N \leq \mathrm{int}(M/2)$ vorausgesetzt.

— Es herrscht volle Erreichbarkeit, d. h. jeder Teilnehmer hat Zugriff zu allen freien Abnehmern.

— Alle Teilnehmer verhalten sich gleichartig und sind voneinander unabhängig, wenn sie nicht gerade miteinander verbunden sind.

— Jeder freie Teilnehmer verteilt seine Rufe gleichmäßig auf die anderen ($M - 1$) Teilnehmer.

— Die Rate für das Einfallen eines Rufes je freier Teilnehmer beträgt α. Die Frei-Zeitabschnitte eines unbeeinflußten Teilnehmers sind also negativ-exponentiell verteilt mit dem Mittelwert $1/\alpha$.

— Die Rate für das Enden einer Belegung je bestehende Belegung beträgt μ. Die Belegungszeiten (Verbindungsdauern) sind also negativ-exponentiell verteilt mit dem Mittelwert $1/\mu$.

— Jeder Ruf, der keinen freien Abnehmer vorfindet oder an einen bereits belegten Teilnehmer gerichtet ist, verschwindet ohne Nachwirkung („lost calls cleared").

— Jeder Ruf, der an einen freien Teilnehmer gerichtet ist und mindestens einen freien Abnehmer vorfindet, führt zur Belegung eines Abnehmers und der beiden Teilnehmer.

— Das Belegen des Abnehmers und der beiden Teilnehmer erfolgt in vernachlässigbar kurzer Zeit.

4. Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten P_j

4.1. *Einfall von Belegungen*

Jeder freie Teilnehmer verursacht eine Rufeinfall-Rate α. Bei j bestehenden Verbindungen sind $(M - 2j)$ Teilnehmer frei. Die Rufeinfall-Rate ist dann

$$\lambda_j = (M - 2j)\,\alpha \qquad j = 0, 1, \ldots N. \tag{1}$$

Bei Bestehen von j Verbindungen sind $2j$ Teilnehmer belegt. Ist ein Ruf an einen dieser $2j$ Teilnehmer gerichtet (Ereignis T), so geht er zu Verlust. Da für jeden freien Teilnehmer voraussetzungsgemäß alle anderen $(M - 1)$ Teilnehmer als Ziel gleichwahrscheinlich sind, ergibt sich somit eine Hemm-Wahrscheinlichkeit

$$\beta_j = P\{T|X_j\} = \frac{2j}{M-1} \qquad j = 0, 1, \ldots N. \tag{2}$$

Da abgewiesene Rufe ohne Nachwirkung verschwinden sollen, ergibt sich aus Gl. (1) und (2) bei j bestehenden Belegungen als Rate für den Beginn einer Belegung (Belegungsanfang-Rate)

$$g_j = \lambda_j(1 - \beta_j) = \alpha\,\frac{(M-2j)(M-1-2j)}{M-1} \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3}$$

4.2. *Enden von Belegungen*

Jede bestehende Verbindung verursacht eine Belegungsende-Rate μ. Bei j bestehenden Verbindungen ergibt sich somit die Belegungsende-Rate zu

$$\mu_j = j \cdot \mu \qquad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

4.3. *Zustandswahrscheinlichkeiten*

Die Zufallsvariable X stellt unter den genannten Voraussetzungen einen Geburt-und-Tod-Prozeß dar, der mit fortschreitender Zeit einem eindeutigen stationären Endzustand zustrebt. Für diesen Endzustand gilt bekanntlich die Gleichgewichtsbedingung

$$P_{j-1}\,g_{j-1} = P_j\,\mu_j \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{5}$$

welche besagt, daß die Zustandsübergänge $j - 1$ nach j und j nach $j - 1$ jeweils gleichhäufig vorkommen. Durch rekursive Anwendung von Gl. (5) ergeben sich unter Berücksichtigung der Normierbedingung

$$\sum_{j=0}^{N} P_j = 1 \tag{6}$$

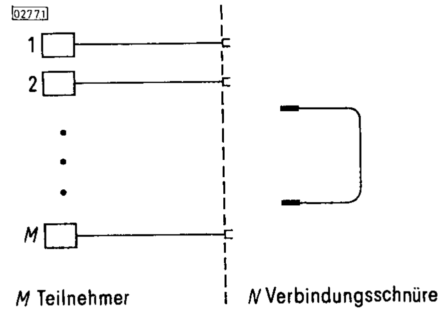

Bild 1.
Handvermittlung
M Teilnehmer, N Verbindungsschnüre.

die Zustandswahrscheinlichkeiten zu

$$P_j = P_0\left(\frac{a}{M-1}\right)^j \frac{1}{j!\,(M-2j)!} \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{7}$$

mit

$$P_0 = 1\bigg/\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{a}{M-1}\right)^k \frac{1}{k!\,(M-2k)!},$$

$a = \dfrac{\alpha}{\mu}$ („Ergiebigkeit" eines Teilnehmers).

5. Berechnung der Verkehrsgrößen

5.1. *Belastung y*

Die Belastung y ist die mittlere Anzahl der belegten Abnehmer, hier also die mittlere Anzahl der bestehenden Verbindungen.

$$y = \sum_{j=0}^{N} j \cdot P_j = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{N} \cdot \left(\frac{a}{M-1}\right)^j \frac{j}{j!\,(M-2j)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{a}{M-1}\right)^k \frac{1}{k!\,(M-2k)!}}. \tag{8}$$

5.2. *Angebot A*

Die mittlere Rufeinfall-Rate λ ist

$$\lambda = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \cdot P_j = \alpha \sum_{j=0}^{N} (M - 2j) \cdot P_j. \tag{9}$$

Das Angebot A ist definiert als die mittlere Anzahl der Rufe, die während eines Zeitintervalls einfallen, das der mittleren Dauer einer erfolgreichen Belegung entspricht. Weil die mittlere Belegungsdauer $1/\mu$ ist, erzeugen die M Teilnehmer bei Vorhandensein von N Abnehmern (Verbindungsmöglichkeiten) das Angebot

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu}\sum_{j=0}^{N}(M-2j)\,P_j = a \cdot \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{a}{M-1}\right)^j \frac{(M-2j)}{j!\,(M-2j)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{a}{M-1}\right)^k \frac{1}{k!\,(M-2k)!}}. \tag{10}$$

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Belastung y, dem Angebot A und der Ergiebigkeit a:

$$A = a \cdot \sum_{j=0}^{N}(M-2j)\,P_j = a\left(M - 2 \cdot \sum_{j=0}^{N} j\,P_j\right) = a(M - 2y). \tag{11}$$

Das bedeutet, daß das Angebot A mit steigender Belastung y doppelt so schnell abnimmt wie beim Engset-

Modell [4, 5]. Die Differenz zwischen Angebot A und Belastung y ist der Restverkehr. Er entsteht durch die zu Verlust gehenden Rufe.

Nachfolgend werden auch die Wahrscheinlichkeiten $P\{X_j|R\}$ verwendet. Es gilt

$$P\{X_j|R\} = \frac{P\{X_j\,R\}}{P\{R\}} = \frac{P\{R|X_j\}\,P\{X_j\}}{P\{R\}} = \frac{\lambda_j}{\lambda}\,P_j\,. \tag{12}$$

5.3. *Verlustruf-Wahrscheinlichkeiten*

5.3.1. Verlustruf-Wahrscheinlichkeit B

B ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein einfallender Ruf verlorengeht. Wie bereits erklärt, kann dies bei diesem Modell durch Belegtzustand des gerufenen Teilnehmers oder durch Mangel an Abnehmern bedingt sein. B ergibt sich als Quotient von Restverkehr und Angebot A (siehe Anhang A1):

$$B = P\{(X_N \cup T) \mid R\} = \frac{A-y}{A}\,. \tag{13}$$

Der Verlust B ist auch bei Vorhandensein von $\mathrm{int}(M/2)$ Abnehmern nicht 0, da er ja die Verluste infolge belegter gerufener Teilnehmer berücksichtigt. Die Bemessung der Abnehmeranzahl nach dem Verlust B ist deshalb sinnlos. Die Zusammensetzung der Verlustruf-Wahrscheinlichkeit B ist im Anhang A1 dargestellt.

Wegen $A = a(M - 2y)$ und $y = A(1 - B)$ besteht zwischen Angebot A bzw. Belastung y und Verlustruf-Wahrscheinlichkeit B folgender Zusammenhang:

$$A = \frac{M \cdot a}{1 + 2a(1-B)}\,, \tag{14}$$

$$y = \frac{M \cdot a(1-B)}{1 + 2a(1-B)}\,. \tag{15}$$

5.3.2. Verlustruf-Wahrscheinlichkeit BL

BL ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender Ruf wegen Abnehmermangels verlorengeht. Dabei wird der Zustand des gerufenen Teilnehmers nicht berücksichtigt.

$$BL = P\{X_N|R\} = \frac{\lambda_N}{\lambda} \cdot P_N\,. \tag{16}$$

Auch BL ist im Fall $N = \mathrm{int}(M/2)$ bei (ungeradem) $M = 2N + 1$ verschieden von 0 und somit nicht zur Bemessung der Abnehmeranzahl geeignet. In diesem Fall sind nämlich bei N belegten Abnehmern alle einfallenden Rufe des $M = 2N + 1$-ten Teilnehmers an die restlichen $2N$ belegten Teilnehmer gerichtet und gehen somit verloren. Der Zusammenhang von B und BL und eine Rekursionsformel zur Berechnung von BL ist im Anhang A1 bzw. A2 angegeben.

5.3.3. Verlustruf-Wahrscheinlichkeit $BLTN$

$BLTN$ ist der Anteil von B, der durch echten Abnehmermangel bedingt ist:

Von den wegen Abnehmermangels zu Verlust gehenden Rufen werden nur diejenigen gezählt, die an unbelegte Teilnehmer gerichtet sind. Dies sind die Rufe, die bei Vorhandensein von zusätzlichen freien Abnehmern tatsächlich zu einer Verbindung geführt hätten.

$$BLTN = P\{(X_N\,\overline{T})|R\} = (1-\beta_N)\,P\{X_N|R\} = $$
$$= (1-\beta_N) \cdot BL = \frac{M-2N-1}{M-1} \cdot BL\,. \tag{17}$$

$BLTN$ ist im Fall $N = \mathrm{int}(M/2)$ stets 0. Im obigen Produkt ist im Fall $M = 2N$ der Faktor BL gleich 0, im Fall $M = 2N + 1$ der Wert von $(1 - \beta_N)$ gleich 0. Erst ab $M = 2N + 2$ ist $BLTN$ verschieden von 0. Erst dann kann der Fall eintreten, daß infolge Abnehmermangels ein Ruf an einen unbelegten Teilnehmer verlorengeht. Die Verlustruf-Wahrscheinlichkeit $BLTN$ eignet sich somit zur Bemessung der Abnehmeranzahl bei reinem Internverkehr. Einsetzen der Werte ergibt für $BLTN$:

$$BLTN = \frac{M-2N-1}{M-1} \cdot BL = $$
$$= \frac{M-2N-1}{M-1} \cdot \frac{(M-2N)\,P_N}{\sum\limits_{j=0}^{N}(M-2j)\,P_j} = \tag{18}$$
$$= \frac{1}{M-1}\,\frac{\left(\frac{a}{M-1}\right)^N \frac{(M-2N)(M-2N-1)}{N!\,(M-2N)!}}{\sum\limits_{0}^{N}\left(\frac{a}{M-1}\right)^j \frac{(M-2j)}{j!\,(M-2j)!}}\,.$$

$BLTN = 1\,\%$ bedeutet, daß im Mittel von 100 einfallenden Rufen einer infolge Abnehmermangels bei gleichzeitig freiem gerufenen Teilnehmer zu Verlust geht („echter Abnehmermangel"). Die darüber hinaus zu Verlust gehenden Rufe ($B = BLTN + BT$) sind an ohnehin belegte Teilnehmer gerichtet. Dies könnte auch durch zusätzliche Abnehmer nicht verhindert werden.

5.4. *Alternative Definitionen*

In [1, 2] ist eine Alternative zu der hier verwendeten Definition des Angebots angegeben. Das Angebot ist dort definiert als die mittlere Anzahl der Rufe an freie Teilnehmer, die während der mittleren Belegungsdauer einer erfolgreichen Belegung einfallen. Der sich dabei ergebende Wert A_1 hängt mit dem Wert von A über die Verlustruf-Wahrscheinlichkeit BT (siehe Gl. (26)) infolge belegter gerufener Teilnehmer auf folgende Weise zusammen:

$$A_1 = A(1 - BT)\,. \tag{19}$$

Als Maß für die Verkehrsgüte wird die Wahrscheinlichkeit $BL_1 = P\{X_N|(\overline{T}\,R)\}$ verwendet. Diese kann aus den im Anhang A1 angegebenen Größen leicht berechnet werden. Es ist

$$BL_1 = P\{X_N|(\overline{T}\,R)\} = \frac{BLTN}{1 - BT}\,. \tag{20}$$

Wegen $y = A(1 - B)$ und Gl. (25) ergibt sich dann

$$y = A_1(1 - BL_1)\,. \tag{21}$$

Um den gegenüber dem Engset-Modell zusätzlich vorhandenen Einfluß der Teilnehmerbelegtfälle besser herauszustellen, wurde hier die übliche Definition des Angebots (A) verwendet.

6. Zulässige Belastung bei vorgegebener Verlust-Wahrscheinlichkeit $BLTN$

Als zulässige Belastung der N Abnehmer bei M Teilnehmern gilt derjenige Wert von y, bei dem der Verlust $BLTN$ einen vorgegebenen Wert annimmt. Der Zusammenhang von $BLTN$ und y ist über die Ergiebigkeit a gegeben. Weil sich Gl. (18) für $BLTN$ nicht nach a auflösen läßt, kann zu einem vorgegebenen $BLTN$ das

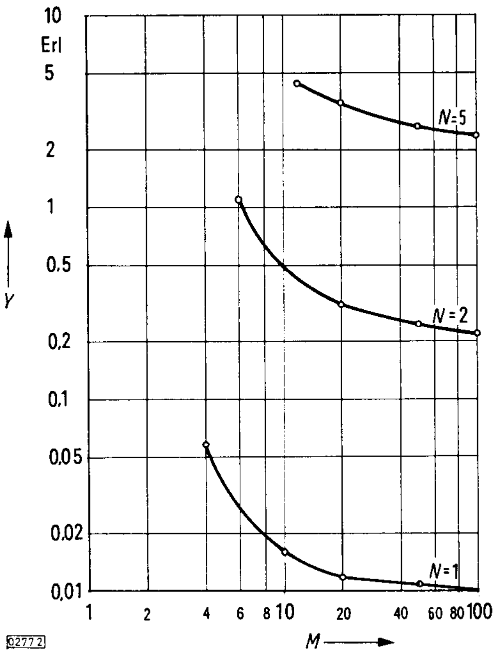

Bild 2.
Zulässige Belastung in Abhängigkeit von der Teilnehmerzahl M bei verschiedenen Abnehmerzahlen N und dem Verlust $BLTN = 1\%$.

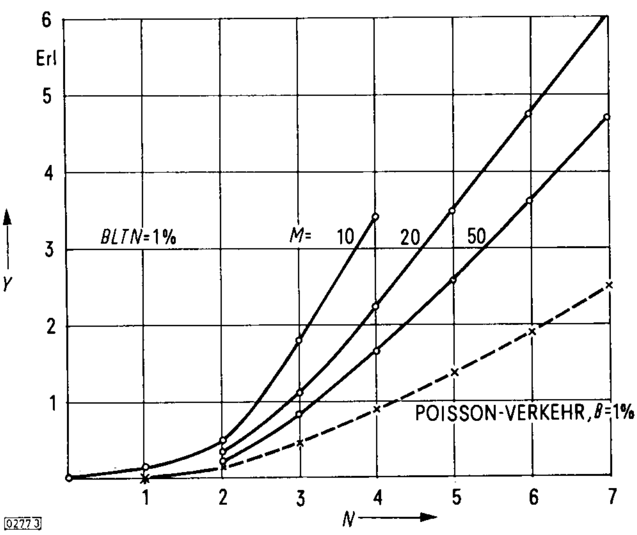

Bild 3.
Zulässige Belastung in Abhängigkeit von der Abnehmerzahl N für verschiedene Teilnehmerzahlen M und dem Verlust $BLTN = 1\%$ (Vergleichskurve: Poisson-Verkehr, $B = 1\%$).

zugehörige a nur durch Iteration ermittelt werden. Mit diesem a ergibt sich mit Gl. (8) dann die zulässige Belastung. *Bild 2* zeigt die zulässige Belastung in Abhängigkeit von der Anzahl M der Teilnehmer für verschiedene Abnehmerzahlen N. Dabei wurde eine zulässige Verlustruf-Wahrscheinlichkeit $BLTN = 1\%$ infolge echten Abnehmermangels vorausgesetzt.

In *Bild 3* ist die zulässige Belastung bei $BLTN = 1\%$ in Abhängigkeit von der vorhandenen Anzahl N der Abnehmer für verschiedene Teilnehmeranzahlen M dargestellt. Zum Vergleich ist die zulässige Belastung der Abnehmer bei Poisson-Verkehr und $B = 1\%$ dargestellt. Ebenso wie beim Engset-Modell ergibt sich dieser Verlauf als Grenzkurve für $M \to \infty$ (vgl. 7.). Die Annäherung an diese Grenzkurve erfolgt jedoch beim Engset-Modell wegen der schwächeren Abhängigkeit der Belegungsanfang-Rate von der Anzahl der bereits bestehenden Belegungen erheblich schneller. Die nach der Engset-Formel für $M = 50$ und $B = 1\%$ zulässige Belastung stimmt beispielsweise bis auf minimale Abweichungen mit der Grenzkurve überein. Bei Internverkehr sind bei gleicher Belastung weniger Abnehmer erforderlich, als sich bei der näherungsweisen Berechnung nach der Engset-Formel bzw. Erlang-Formel ergeben würden.

7. Grenzfall Poisson-Verkehr

Läßt man die Teilnehmeranzahl M unter der Bedingung $M \cdot a = \text{const} = A_0$ unbegrenzt wachsen, so gehen die angegebenen Formeln in die Beziehungen für reinen Poissonverkehr mit dem Angebot A_0 über.

Es gilt nämlich für $M \gg N$:

$$\frac{M!}{j!\,(M-2j)!} = \frac{M(M-1)\ldots(M-2j+1)}{j!} \approx \frac{M^{2j}}{j!}\,. \tag{22}$$

Dadurch geht P_j für $M \to \infty$ unter obiger Bedingung über in

$$P_j = \frac{\left(\frac{a}{M-1}\right)^j \frac{M!}{j!\,(M-2j)!}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\frac{a}{M-1}\right)^k \frac{M!}{k!\,(M-2k)!}} \to$$

$$\to \frac{\frac{(a\,M)^j}{j!}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{(a\cdot M)^k}{k!}} = \frac{\frac{A_0^j}{j!}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{A_0^k}{k!}}\,. \tag{23}$$

Dies ist aber genau die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei reinem Poissonverkehr mit dem Angebot A_0 von N Abnehmern j belegt sind.

BL und $BLTN$ gehen für $M \to \infty$ unter obiger Bedingung in die Erlangsche Verlustformel über.

$$BLTN = \frac{M-2N-1}{M-1} \cdot \frac{(M-2N)\,P_N}{\sum\limits_{j=0}^{N}(M-2j)\,P_j} \to$$

$$\to E_{1,N}(A_0) = \frac{\frac{A_0^N}{N!}}{\sum\limits_{j=0}^{N}\frac{A_0^j}{j!}}\,. \tag{24}$$

Dieser Sachverhalt ist auch anschaulich klar, denn bei $a \to 0$ treten keine Verluste infolge belegter gerufener Teilnehmer mehr auf.

* * *

Die diesem Beitrag zugrunde liegenden Arbeiten wurden mit Mitteln des Bundesministers für Forschung und Technologie gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt liegt jedoch allein bei den Autoren.

8. Anhang

A 1. Zusammensetzung der Verlustruf-Wahrscheinlichkeit B

Bei den nachfolgenden Definitionen für die verschiedenen Anteile der Verlustruf-Wahrscheinlichkeit kennzeichnet L die Verlustursache „Abnehmermangel" (*L*eitungsmangel) und T die Verlustursache „*T*eilnehmer belegt". Nachgestelltes N kennzeichnet die Negation.

Praktische Bedeutung bei der Bemessung der Abnehmeranzahl hat $BLTN$ oder alternativ das aus $BLTN$ und BT berechenbare

BL_1. Die übrigen Größen zeigen die Aufteilung von B entsprechend den verschiedenen Verlustursachen.
Es gilt:

$$B = P\{(X_N \cup T)|R\} = \\ = P\{T|R\} + P\{(X_N \bar{T})|R\} = BT + BLTN\,, \tag{25}$$

$$BT = P\{T|R\} = \sum_{j=0}^{N} P\{(T\,X_j)|R\} = \\ = \sum_{j=0}^{N} \beta_j\,P\{X_j|R\} = \sum_{0}^{N} \frac{\beta_j\,\lambda_j\,P_j}{\lambda}\,, \tag{26}$$

$$BLTN = P\{(X_N \bar{T})|R\} = (1-\beta_N)\,P\{X_N|R\} = \\ = (1-\beta_N)\cdot\frac{\lambda_N}{\lambda}\cdot P_N\,. \tag{27}$$

BT ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein gerufener Teilnehmer belegt ist. $BLTN$ wird hier als Verlustruf-Wahrscheinlichkeit infolge echten Abnehmermangels bezeichnet. Sie ist durch die Rufe bedingt, welche an freie Teilnehmer gerichtet sind und infolge Abnehmermangels verlorengehen.
Ebenso gilt:

$$B = P\{(X_N \cup T)|R\} = \\ = P\{X_N|R\} + P\{(\bar{X}_N\,T)|R\} = BL + BLNT\,, \tag{28}$$

$$BL = P\{X_N|R\} = \frac{\lambda_N}{\lambda}\,P_N\,, \tag{29}$$

$$BLNT = P\{(\bar{X}_N\,T)|R\} = \sum_{j=0}^{N-1} P\{(X_j\,T)|R\} = \\ = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j\,P\{X_j|R\} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\beta_j\,\lambda_j\cdot P_j}{\lambda}\,. \tag{30}$$

BL ist die Verlustruf-Wahrscheinlichkeit infolge Abnehmermangels. Der Zustand des gerufenen Teilnehmers ist dabei nicht berücksichtigt. $BLNT$ ist durch die Rufe bedingt, die freie Abnehmer vorfinden und infolge bereits belegter Teilnehmer verlorengehen.
Zwischen BL und $BLTN$ besteht folgender Zusammenhang:

$$BLTN = (1-\beta_N)\cdot BL\,. \tag{31}$$

Schließlich gilt

$$B = P\{(X_N \cup T)|R\} = \\ = P\{X_N|R\} + P\{T|R\} - P\{(X_N\,T)|R\} = \\ = BL + BT - BLT\,, \tag{32}$$

$$BLT = P\{(X_N\,T)|R\} = \beta_N\,P\{X_N|R\} = \beta_N\cdot BL\,. \tag{33}$$

BLT ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender Ruf verloren geht, weil der gerufene Teilnehmer belegt ist und alle Abnehmer belegt sind.
Als weitere Beziehung zwischen den bereits definierten Verlustruf-Wahrscheinlichkeiten ergibt sich:

$$B = P\{(X_N \cup T)|R\} = P\{(X_N\,\bar{T})|R\} + P\{(\bar{X}_N\,T)|R\} + \\ + P\{(X_N\,T)|R\} = BLTN + BLNT + BLT\,. \tag{34}$$

Die Verlustruf-Wahrscheinlichkeit B ist gleich dem Quotienten von Restverkehr und Angebot.

$$\frac{A-y}{A} = 1 - \frac{y}{A} = 1 - \frac{\mu}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} j\,P_j = \\ = 1 - \sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j\,P_j}{\lambda} = 1 - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{\lambda_j(1-\beta_j)\,P_j}{\lambda} = \\ = 1 - \sum_{0}^{N-1}(1-\beta_j)\,P\{X_j|R\} = \tag{35} \\ = P\{X_N|R\} + \sum_{0}^{N-1}\beta_j\,P\{X_j|R\} = BL + BLNT = B\,.$$

Bei großen Verlusten B können die Teilnehmer (wie beim Engset-Modell, vgl. [4, 5]) ein Angebot erzeugen, welches größer ist als die Teilnehmeranzahl. Dies kommt daher, weil bei der Berechnung des Angebots auch jeder zu Verlust gehende Ruf mit der mittleren Belegungsdauer eines erfolgreichen Rufes zum Angebot beiträgt.

A 2. Rekursive Berechnung von $BLTN$

Nach Gl. (26) ist

$$BL^{(N)} = \frac{\lambda_N\cdot P_N^{(N)}}{\lambda^{(N)}} = \frac{\lambda_N\cdot P_N^{(N)}}{\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j\cdot P_j^{(N)} + \lambda_N\cdot P_N^{(N)}}\,; \tag{36}$$

λ_j, β_j und μ_j sind unabhängig von N. Wegen Gl. (5) ist

$$\lambda_N\cdot P_N^{(N)} = V_N\cdot\lambda_{N-1}\cdot P_{N-1}^{(N)}\,, \tag{37}$$

mit

$$V_N = \frac{\lambda_N(1-\beta_{N-1})}{\mu_N}\,. \tag{38}$$

Wegen Gl. (7) gilt mit einem von j unabhängigen Faktor C:

$$P_j^{(N)} = P_j^{(N-1)}\cdot C\,. \tag{39}$$

Einsetzen von Gl. (37) und Gl. (39) in Gl. (36) ergibt folgende Rekursionsformel für BL:

$$BL^{(0)} = 1\,,\\ BL^{(N)} = \frac{V_N\,BL^{(N-1)}}{1 + V_N\,BL^{(N-1)}}\,. \tag{40}$$

Mit den hier vorliegenden Werten ergibt sich:

$$V_N = \frac{\lambda_N(1-\beta_{N-1})}{\mu_N} = \\ = \frac{(M-2\,N)\,\alpha\,(M-2\,N+1)}{N\cdot\mu(M-1)} = \\ = a\,\frac{(M-2\,N)\,(M-2\,N+1)}{N(M-1)}\,. \tag{41}$$

Somit ist in diesem Fall:

$$BL^{(0)} = 1$$

$$BL^{(N)} = \frac{a(M-2\,N)\,(M-2\,N+1)\cdot BL^{(N-1)}}{N(M-1) + a(M-2\,N)\,(M-2\,N+1)\cdot BL^{(N-1)}} \quad \text{für } 2\,N < M \tag{42}$$

$$BL^{(N)} = 0 \quad \text{für } 2\,N \geqq M$$

Aus BL kann $BLTN$ berechnet werden:

$$BLTN^{(N)} = (1-\beta_N)\cdot BL^{(N)} = \frac{(M-2\,N-1)}{M-1}\,BL^{(N)}\,. \tag{43}$$

Schrifttum

[1] *Bazlen, D.:* Mehrstufige doppelt gerichtete Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik mit Intern- und Externverkehr. 18. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart.

[2] *Bazlen, D.:* Link systems with both-way connections and outgoing finite-source traffic. Nachrichtentechn. Z. 27 (1974) S. 334 bis 341.

[3] *Botsch, D.:* Die Verlustwahrscheinlichkeit einstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik mit Extern- und Internverkehr. Arch. Elektron. u. Übertr.techn. 22 (1968) S. 127 bis 132.

[4] *Störmer, H.; Behlendorff, E.; Bininda, N.; Bretschneider, G.; Hoffmann, E.; Suchlandt, H.:* Verkehrstheorie, Grundlagen für die Bemessung von Nachrichten-Vermittlungsanlagen. München, Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1966.

[5] Tabellenbuch Fernsprechverkehrstheorie Teil 1. Siemens AG, München 1970.

(Eingangsdatum: 27. August 1975; wieder eingegangen am 25. November 1975)