

# Kaskadenmaschine KSM: bürstenlose Induktionsmaschine für doppelt gespeiste Generatorsysteme – Analyse und Kenngrößen der Rotorwicklung

## *Cascade Induction Machine: Brushless Machine for Doubly Fed Generator Systems – Analysis and Characteristic Values of the Rotor Winding*

Prof. Dr.-Ing. Carsten Fräger 

Forschungszentrum Energie – Mobilität – Prozesse (EMP), Institut für Konstruktionselemente, Mechatronik und Elektromobilität (IKME)

Hochschule Hannover, Deutschland

Carsten.Fraeger@HS-Hannover.de

### Übersicht

Bürstenlose Generatorsysteme mit doppelt gespeisten Kaskadenmaschinen werden zurzeit für die regenerative Energieerzeugung z. B. mit Windkraftanlagen untersucht. Sie sind eine Alternative zu Generatorsystemen mit doppelt gespeisten Induktionsmaschinen. Kaskadenmaschinen arbeiten mit zwei Drehfeldern verschiedener Polpaarzahlen. Im Stator befinden sich zwei Wicklungen für die beiden Polpaarzahlen oder eine Wicklung zur gleichzeitigen Erzeugung der beiden Drehfelder über jeweils getrennte Anschlüsse. Der Rotor trägt eine in sich kurzgeschlossene Wicklung, die gleichzeitig mit beiden Drehfeldern verkettet ist und deren Strom beide Drehfelder gleichzeitig erzeugt. Der vorliegende Beitrag beschreibt wie die elektromagnetische Wirkung unsymmetrischer Rotorwicklungen für Kaskadenmaschinen mit der Drehfeldanalyse behandelt werden kann. Dieser Beitrag ist eine Erweiterung des früheren Beitrags [Kaskadenmaschine ... Analyse der Rotorwicklung DOI 10.25968/opus-3071](#) um die Kenngrößen der Rotorwicklung. Die Rotorwicklungen erzeugen gleichzeitigen beide Grundfelder der Kaskadenmaschine. Sie sind z. T. mit Wicklungszweigen aufgebaut, die in verschiedenen Knoten zusammen geschaltet sind. Mit dem hier dargestellten Rechenverfahren wird die elektromagnetische Kopplung zwischen den Wicklungszweigen und zur Statorwicklung erfasst. Für das Verhalten der Wicklung werden Kenngrößen angegeben.

### Abstract

Brushless generator systems with doubly-fed cascade machines are currently being investigated for renewable energy generation, e.g. with wind turbines. They are an alternative to generator systems with doubly-fed induction machines. Cascade machines work with two rotating fields with different numbers of pole pairs. There are two windings in the stator for the two numbers of pole pairs or one winding for the simultaneous generation of the two rotating fields with separate connections for the two rotating fields. The rotor has a short-circuited winding that is linked to both rotating fields at the same time and whose current generates both rotating fields simultaneously. This article describes how the electromagnetic effect of asymmetrical rotor windings for cascade machines can be treated using rotating field analysis. This article is an extension of the previous article [Cascade ... Analysis of the Rotor Winding DOI 10.25968/opus-3071](#) with the characteristic values of the rotor winding. The rotor windings generate both basic fields of the cascade machine at the same time. They are partly constructed with winding branches that are connected together in different nodes. The calculation method shown here is used to record the electromagnetic coupling between the winding branches and to the stator winding. Characteristic values are specified for the behavior of the winding.

## 1 Einleitung

Generatorsysteme mit variabler Drehzahl werden für die regenerative Energieerzeugung eingesetzt. Bei Windkraftanlagen sind dies u. a. doppeltgespeiste Induktionsmaschinen mit Schleifringläufer. Bei doppelt gespeisten Induktionsmaschinen wird der größte Teil der

Leistung von der Statorwicklung über den Transformator direkt in das Netz mit fester Frequenz gespeist.

Ein kleinerer Teil der Leistung wird von der Rotorwicklung über einen Umrichter und den Transformator in das Netz gespeist. Durch die veränderliche Frequenz im Rotorkreis wird die Drehzahl des Generators variiert, so dass die jeweils größtmögliche

Leistung von der Windturbine abgenommen und in das Netz gespeist werden kann.

Eine typische Leistungsaufteilung bei Vollast sieht so aus, dass 70...75% der Leistung direkt in das Netz gespeist werden und nur 25...30% über den Umrichter gehen. Dadurch fällt der Umrichter relativ kostengünstig aus. Die mit dem Umrichterbetrieb verbundenen Netzzrückwirkungen sind geringer, als wenn die gesamte Leistung über den Umrichter ins Netz gespeist werden müsste.

Von Nachteil ist, dass die Induktionsmaschine Schleifringe und Bürsten besitzt. Dies bedeutet einen entsprechenden Wartungsaufwand für die Schleifringe und Kohlebürsten. Weiter ist die Lebensdauer der Schleifringe begrenzt und der Verschleiß hängt von den jeweiligen klimatischen Gegebenheiten ab. So wirken sich die hohe Luftfeuchtigkeit bei Offshore-Anlagen oder die geringe Luftfeuchtigkeit in Trockengebieten auf den Verschleiß aus.

Eine Alternative zu Induktionsmaschinen mit Schleifringläufer sind Induktionsmaschinen mit innerer Kaskadenschaltung, sog. Kaskadenmaschinen (KSM) [2?, 4, 5]. Zur Übertragung der Leistung aus dem Rotor in den Stator wird bei diesen bürstenlosen Maschinen das Magnetfeld benutzt. Sie eignen sich beispielsweise für mitteltourige Generatorsysteme mit Drehzahlen im Bereich von etwa 500 ... 1000<sup>1</sup>/min .

## 2 Aufbau und Funktion der Kaskadenmaschine (KSM)

Der Aufbau der KSM und ihre Wirkungsweise werden in den folgenden Abschnitten dargestellt. Weiter erfolgt ein qualitativer Vergleich mit der Induktionsmaschine mit Schleifringläufer und die Darstellung eines Generatorsystems mit KSM für Windkraftanlagen.

### 2.1 Aufbau der KSM

Die KSM hat im Stator zwei getrennte Drehstromwicklungen mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  (s. Abb. 1 links) oder eine gemeinsame Wicklung für beide Polpaarzahlen (s. Abb. 1 rechts). Die gemeinsame Wicklung hat getrennte Anschlüsse für die beiden Drehfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$ .

Ein Beispiel für eine Kaskadenmaschine mit getrennten Wicklungen für die Polpaarzahlen  $p_1 = 1$  und  $p_2 = -3$  zeigt der Zonenplan in Abb. 2. Die eine Wicklung ist in der Unterlage, die andere in der Oberlage der Statornuten untergebracht. Die beiden Wicklungen nutzen jeweils einen Teil der Querschnittfläche der Nuten im Stator.

Im Rotor hat die KSM eine in sich geschlossene

Wicklung ohne äußere Anschlüsse, die die beiden Drehfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  miteinander koppelt. Ein Stromsystem in der Rotorwicklung erzeugt gleichzeitig die beiden Felder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$ . Dazu hat die Rotorwicklung einen Aufbau, der sich  $(p_1 - p_2)$ -mal am Umfang wiederholt. Die Wicklung ist also bezüglich der beiden Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  unsymmetrisch aufgebaut. Die in sich geschlossene Wicklung besteht aus verschiedenen Wicklungszweigen, die in Reihe geschaltet und/oder in Knoten zusammen geschaltet sind.

Abb. 3 zeigt ein Beispiel für eine Wicklung mit verschiedenen Wicklungszweigen, die in Knoten mit 3 und 5 Leitern zusammen geschaltet sind. Sie ist für die Polpaarzahlen  $p_1 = 2$  und  $p_2 = -4$  konzipiert. Der Wicklungsaufbau wiederholt sich  $p = p_1 - p_2 = 6$ -mal entlang des Umfangs. Die Wicklung ist in sich geschlossen und hat keine äußeren Anschlüsse.

### 2.2 Funktion der KSM

Bei der Leistungsumwandlung in der KSM sind beide Drehfelder gleichzeitig beteiligt. Wenn die Wicklung 1 der Polpaarzahl  $p_1$  mit dem Drehstromnetz der Frequenz  $f_1$  verbunden ist, erzeugt der Strom in der Wicklung 1 ein Drehfeld mit der synchronen Drehzahl  $n_{0,1}$  (s. Abb. 2 oben rechts).

Dieses Drehfeld induziert in der Rotorwicklung eine Spannung mit der Frequenz  $f_R$ . Da die Rotorwicklung in sich geschlossen ist, fließt in ihr ein Strom, der ebenfalls die Frequenz  $f_R$  hat.

Damit wird eine Leistung von der Wicklung 1 über den Luftspalt in den Rotor magnetisch übertragen. Bei der Leistungsübertragung entsteht ein Drehmoment durch das Feld  $p_1$  auf den Rotor.

Die im Rotor induzierte Spannung führt zu einem Strom in der Rotorwicklung, der ein Magnetfeld mit der Polpaarzahl  $p_2$  erzeugt. Dieses Magnetfeld dreht sich mit der Drehzahl  $n_{0,2}$  gegenüber dem Stator (s. Abb. 2 unten, rechts). Es induziert in der Statorwicklung 2 eine Spannung mit der Frequenz  $f_2$ .

Sind an der Wicklung 2 eine Spannungsquelle oder Widerstände angeschlossen, fließt in der Wicklung 2 ebenfalls ein Strom. Damit wird von der Rotorwicklung eine Leistung über den Luftspalt in die Wicklung 2 magnetisch übertragen. Bei dieser Leistungsübertragung entsteht durch das Feld  $p_2$  ebenfalls ein Drehmoment auf den Rotor.

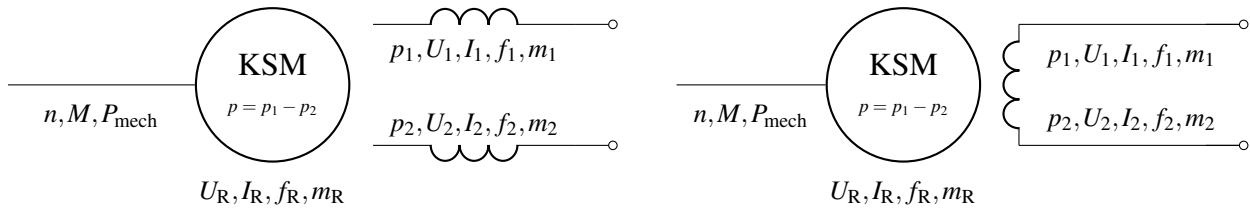
Beide Drehmomente wirken gemeinsam auf den Rotor und erzeugen mit der Rotordrehzahl  $n$  (s. Abb. 2 Mitte) die mechanische Leistung. Bei der Leistungsumwandlung sind beide Drehfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  beteiligt. Je nach Richtung der Leistungsübertragung arbeitet die KSM motorisch oder generatorisch.

Die Anschlüsse der Statorwicklungen oder der gemeinsamen Wicklung verhalten sich ähnlich wie die Stator- und Rotorwicklungsanschlüsse einer Induktionsmaschine mit Schleifringläufer. Sind an der Wicklung 2 Widerstände angeschlossen, arbeitet die KSM unterhalb der synchronen Drehzahl motorisch und

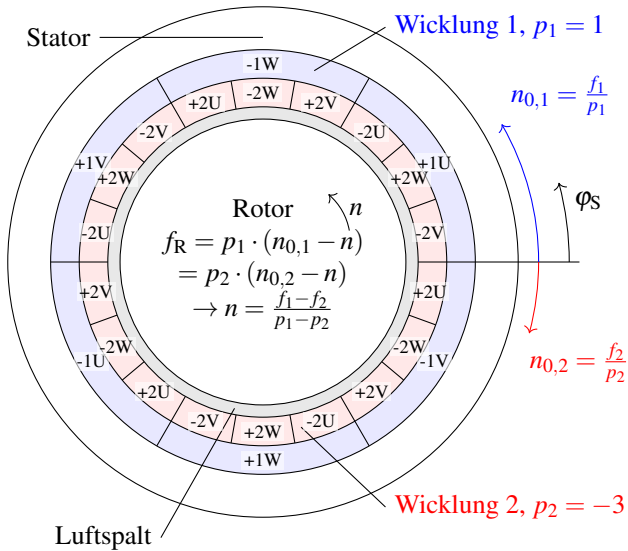


This document is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license, except for the images used

in the work, which are taken from other works and for which individual image rights and licensing conditions apply. The respective sources of these figures are indicated in the captions.



**Abbildung 1** Aufbau der Kaskadenmaschine mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$ , links mit getrennten Wicklungen, rechts mit einer gemeinsamen Wicklung für die beiden Polpaarzahlen.



**Abbildung 2** Zonenplan für eine Kaskademaschine mit  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = -3$  mit getrennten 3-strängigen Wicklungen im Stator,  $m = m_1 = m_2 = 3$ , Zählrichtung des Statorwinkels  $\varphi_S$  und der Drehzahl  $n$  in mathematisch positiver Richtung, Kennzeichnung der Wicklungszonen der Wicklung 1 in der Unterlage mit  $p_1$ : 1U, 1V, 1W, entsprechend Wicklung 2 in der Oberlage mit  $p_2$ : 2U, 2V, 2W.

oberhalb der synchronen Drehzahl generatorisch. Über die Widerstände können der Strom und das Drehmoment, wie bei einer Induktionsmaschine mit Schleifringläufer, eingestellt werden.

Für die Anwendung als doppelt gespeister Generator wird Wicklung 2 mit einem Umrichter verbunden, der die Wicklung 2 mit der Frequenz  $f_2$  mit dem Netz mit der Frequenz  $f_1$  koppelt. Mit der Spannung des Umrichters können der Strom und das Drehmoment gesteuert werden, so dass die KSM im über- und untersynchronen Betrieb generatorisch arbeitet, also mechanische Leistung in elektrische Leistung umwandelt. Abb. 4 zeigt die Aufteilung der mechanischen Leistung  $P_{\text{mech}}$  auf die beiden Leistungen  $P_{\delta 1}$  und  $P_{\delta 2}$ , die mit den Magnetfeldern über den Luftspalt in die Statorwicklungen übertragen werden. Wicklung 1 gibt die Leistung mit der Frequenz  $f_1$  direkt ins Netz. Wicklung 2 speist mit der Frequenz  $f_2$  den Umrichter, der die Leistung mit der Frequenz  $f_1$  ins Netz speist.

### 2.3 Vor- und Nachteile der KSM

An den Wicklungsanschlüssen der Statorwicklungen verhält sich die KSM ähnlich wie eine Induktionsmaschine mit Schleifringläufer. Beim Vergleich der Eigenschaften ergeben sich ein paar Vor- und Nachteile der KSM gegenüber der Induktionsmaschine mit Schleifringläufer:

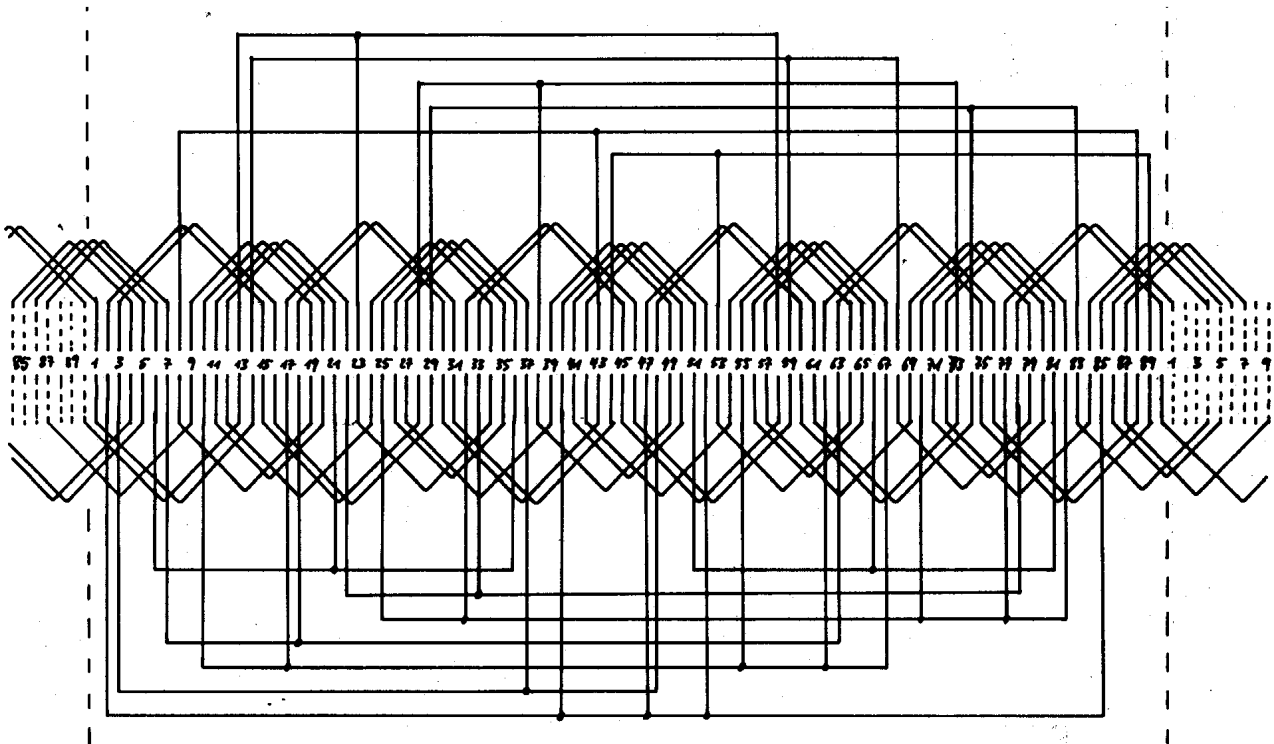
#### • Vorteile der KSM

- + keine Schleifringe, keine Kohlebürsten
- + weniger Wartungsaufwand, da der Ersatz der Kohlebürsten entfällt
- + einfachere Konstruktion, da der häufig außen liegende Bürstenapparat wegfällt
- + unempfindlich gegenüber Feuchtigkeit und Trockenheit (Verschleiß der Kohlebürsten hängt von der Luftfeuchtigkeit ab)
- + Potenzial für besseren Wirkungsgrad und größere Drehmomentausbeute
- + geringere Lagerströme. Die kapazitive Kopplung des Wechselrichters zum Rotor ist geringer als bei Schleifringläufermaschinen. Dadurch sind die Lagerströme und die damit verbundenen Lagerschädigungen geringer. Dies führt zu einer größeren Lagerlebensdauer oder weniger Aufwand zur Vermeidung schädlicher Lagerströme.
- + geringe Spannungen im Rotor und damit geringerer Isolationsaufwand im Rotor

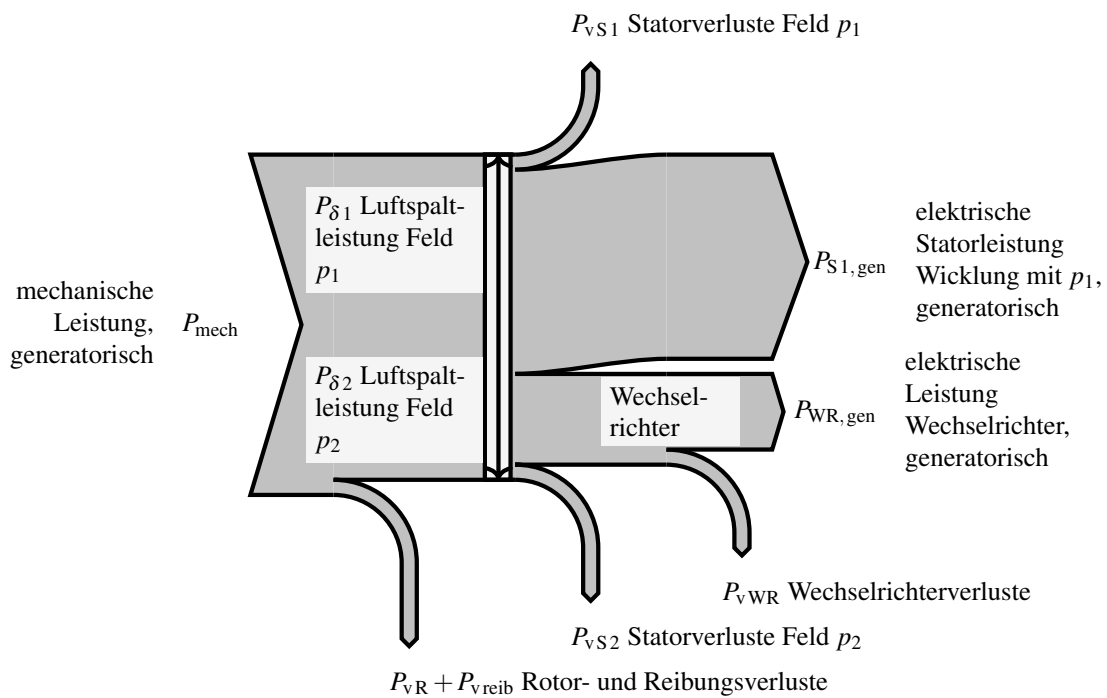
#### • Nachteile der KSM

- komplizierterer Statoraufbau mit zwei getrennten Wicklungen oder gemeinsamer Wicklung mit getrennten Anschlüssen
- spezielle Rotorwicklung
- hohe resultierende Polpaarzahl  $p \geq 4$  bzw. Polzahl  $2p \geq 8$  (s. unten)
- aus dem Feld mit der Polpaarzahl  $p_1$  entsteht eine synchrone Drehzahl  $n_{0,1}$ , die die höchste Drehzahl für einen kontinuierlichen Drehzahlbereich begrenzt

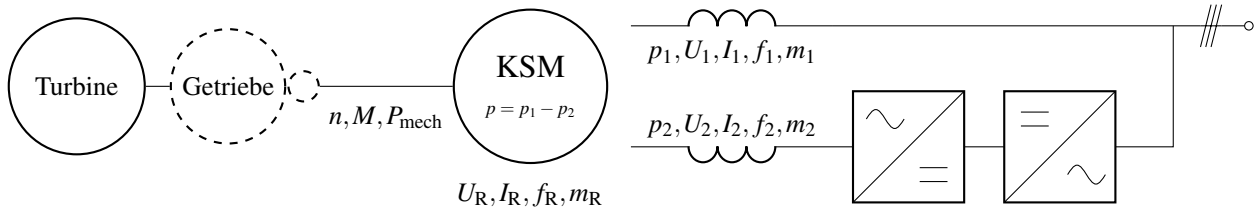
**Für Generatorsysteme in Windkraftanlagen stellt der Wegfall der Schleifringe und Kohlebürsten einen großen Vorteil dar.** Sie weisen große Betriebszeiten, hohe Zuverlässigkeitsanforderungen und wechselnde Luftfeuchtigkeiten auf (bei Off-Shore-Anwendungen auch salzhaltige Luft), so dass die entfallenden Kohlebürsten und Schleifringe den Betrieb der Anlagen erleichtern.



**Abbildung 3** Rotorwicklung für eine Kaskadenmaschine mit der resultierenden Polpaarzahl  $p = 6$ , den einzelnen Polpaarzahlen  $p_1 = 2$  und  $p_2 = -4$ ,  $N = 90$  Nuten, Aufbau aus verschiedenen Wicklungszweigen die in Knoten mit 3 und 5 Leitern zusammen geschaltet sind [5].



**Abbildung 4** Leistungsfluss des Generator systems mit KSM im übersynchronen Betrieb, Zusammenführung der Leistungen mit Transformator hier nicht dargestellt.



**Abbildung 5** Prinzipaufbau einer Windkraftanlage mit einer Kaskadenmaschine (KSM) und Umrichter, hier mit getrennten Wicklungen für  $p_1$  und  $p_2$  dargestellt (KSM mit gemeinsamer Wicklung s. Abb. 1 rechts). Zur Anbindung an das Netz kann zwischen der Wicklung 1, dem Umrichter und dem Netz ein 3-Wicklungstransformator angeordnet werden.

## 2.4 Aufbau einer Windkraftanlage mit KSM

Den Prinzipaufbau einer Windkraftanlage mit einer KSM zeigt Abb. 5. Die Windturbine liefert die mechanische Leistung bei einer kleinen Drehzahl und hohem Drehmoment. Mit dem Getriebe wird die Leistung der Windturbine auf eine höhere Drehzahl mit kleinerem Drehmoment übertragen. Die KSM wandelt die mechanische Leistung in elektrische Leistung (Leistungsfluss s. Abb. 4). Im übersynchronen Betrieb mit einer Drehzahl oberhalb der Synchrodrehzahl der KSM geben beide Statorwicklungsteile elektrische Leistung ab.

Wicklung 1 speist die Leistung  $P_{S1,gen}$  ins Netz. Die Leistung der Wicklung 2 wird über einen Wechselrichter in eine Leistung  $P_{WR,gen}$  mit Netzfrequenz gewandelt und ebenfalls in das Netz gespeist. Drehfeldmaschinen sind normalerweise mit symmetrischen Wicklungen aufgebaut. D.h., dass sich die Wicklung entlang des Umfangs in der Regel mit der Polzahl wiederholt. Eine Ausnahme bilden Bruchlochwicklungen, bei denen die Nutzahl je Pol und Strang eine gebrochene Zahl ist. Diese Wicklungen sind jedoch in jedem der Stränge identisch aufgebaut, so dass die drei Strangströme gleich sind und sich das Oberfeldverhalten mit den drei Strangströmen und der Wicklungsverteilung beschreiben lässt.

Anders verhält es sich z. B. bei Wicklungsfehlern in der Rotorwicklung von Asynchronmaschinen. Ein Stabbruch führt dazu, dass die Wicklung eine Unsymmetrie hat, die sich nur einmal je Umfang wiederholt. Diese Art der Unsymmetrie wird dadurch behandelt, dass in der Nut mit dem gebrochenen Stab ein Strom angenommen wird, der den normalerweise hier fließenden Strom zu Null kompensiert. Das Feldspektrum dieses Ersatzstromes wird dann zur Berechnung der Induktionswirkung herangezogen. Diese Unsymmetrie ist damit aber nur als Spezialfall zu berechnen.

Ähnlich verhält es sich bei Wicklungsfehlern in Rotorwicklungen von Schleifringläufern. Ein Windungsschluss führt dazu, dass die drei Stränge des Rotors unterschiedlich sind und der fehlerhafte Strang ein deutlich verändertes Feldspektrum hat. Dies wird in der Berechnung dadurch berücksichtigt, dass diese kurzgeschlossene Windung als separate Wicklung mit einem eigenen Strom betrachtet wird.

Diese Methoden mit einem separaten Strom zur Berücksichtigung des Fehlers lassen jedoch die

Behandlung mehrfacher Fehler kaum zu. So ist es kaum vorstellbar, einen Stab- und Ringbruch zu behandeln oder einen erhöhten Widerstand eines Stabes zu berücksichtigen. Beides gelingt nur mit starken Vereinfachungen.

Bei Schenkelpolsynchronmaschinen ist z. B. im Hauptpol ein Gitter untergebracht. Die Gitter benachbarter Pole sind miteinander verbunden und bilden die Dämpferwicklung des Rotors. Dieser Aufbau führt dazu, dass die Stäbe eine unterschiedliche Weite haben und für die Pollücke ein anderer Luftspalt wirkt als in Polmitte. In dieser Dämpferwicklung können sich sehr unterschiedliche Ströme ausbilden und aufgrund des unsymmetrischen Aufbaus werden sehr unterschiedliche Feldpolpaarzahlen generiert.

Bei Kaskadenmaschinen wird sogar bewusst ein, bezüglich der Grundpolpaarzahlen der Maschine, unsymmetrischer Aufbau der Rotorwicklung vorgenommen, so dass die Rotorwicklung beide Grundpolpaarzahlen erzeugt und so für eine elektromagnetische Kopplung der beiden Grundfelder sorgt. Die analytische Behandlung ist nur für bestimmte Wicklungsanordnungen möglich, für die eine sinnvolle Annahme über die Stromverteilung in der Rotorwicklung machbar ist. Verzweigte Wicklungen lassen sich jedoch kaum vernünftig behandeln.

Im Folgenden wird daher ein Verfahren beschrieben, dass die Analyse beliebig unsymmetrischer Wicklungen erlaubt. Diese Verfahren ist so gehalten, dass jede Schaltung von Leitern behandelt wird. Die Analyse erfolgt so, dass die Wicklung zunächst mit den Methoden der Netzwerkanalyse nach den unabhängigen Strömen untersucht wird. Zu den unabhängigen Strömen wird die elektromagnetische Wirkung durch Selbst- und Gegeninduktivitäten für die generierten Drehfelder angegeben. Dadurch lassen sich alle Verfahren zur Drehfeldtheorie verwenden. Dazu gehören die Berücksichtigung von Nutung und Sättigung.

Die Wirkung der gesamten Rotorwicklung wird durch komplexe Selbst- und Gegeninduktivitäten beschrieben, die sich aus dem Induktivitäten für die generierten Felder und den Wicklungsaufbau ergeben. Diese Induktivitäten beinhalten die komplette Wirkung der Wicklung.

So lassen sich die oben beschriebenen Fehler in den Rotorwicklungen von Asynchronmaschinen behandeln. Genauso lässt sich das magnetische Verhalten von unsymmetrischen Dämpferkäfigen



von Schenkelpolsynchronmaschinen berechnen. Die Wicklungen für Kaskadenmaschinen können so ebenfalls behandelt werden, um das Betriebsverhalten der Kaskadenmaschine vorausberechnen zu können.

### 3 Resultierende Polpaarzahl und Festlegung zum Drehsinn

Die Kaskadenmaschine arbeitet mit zwei Drehfeldern mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$ . Der Stator hat z. B. zwei getrennte Drehstromwicklungen für die beiden Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  (s. Abb. 1 und 2).

Für die folgenden Betrachtungen werden zwei Drehfelder mit zeitlich und räumlich cosinusförmigem Feldverlauf betrachtet. Oberfelder der Statorwicklungen werden an dieser Stelle nicht behandelt. Die Darstellung erfolgt in Statorkoordinaten mit dem Statorwinkel  $\varphi_S$  (s. Abb. 2 für das Beispiel  $p_1 = 1, p_2 = -3$ ).

Die beiden Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  werden wie bei der Induktionsmaschine positiv gezählt, wenn ein jeweils rechtsdrehender Drehstrom mit positiver Frequenz in den Statorwicklungen zu jeweils einem rechtsdrehenden Drehfeld führt (Drehung in mathematisch positiver Richtung):

$$B_{S1}(\varphi_S, t) = \hat{B}_{S1} \cdot \cos(p_1 \varphi_S - 2\pi f_1 t) \quad (1)$$

$$B_{S2}(\varphi_S, t) = \hat{B}_{S2} \cdot \cos(p_2 \varphi_S - 2\pi f_2 t) \quad (2)$$

Wird das Feld 1 von der Wicklung 1 mit einem Drehstrom der Frequenz  $f_1$  erzeugt, lässt sich die Frequenz  $f_R$  der induzierten Spannungen und Ströme im Rotor in Abhängigkeit von der Drehzahl  $n$  berechnen:

$$f_R = f_1 - p_1 \cdot n \quad (3)$$

Für die Wicklung 2 gilt das gleiche, so dass mit folgenden Beziehungen die Frequenz  $f_2$  der Spannungen und Ströme in der Wicklung 2 berechnet werden kann:

$$f_R = f_2 - p_2 \cdot n \quad (4)$$

$$\rightarrow f_2 = f_R + p_2 \cdot n = f_1 - p_1 \cdot n + p_2 \cdot n \\ = f_1 - (p_1 - p_2) \cdot n \quad (5)$$

$$\rightarrow f_2 = f_1 - p \cdot n \quad \text{mit } p = p_1 - p_2 \quad (6)$$

Die Frequenz in der zweiten Statorwicklung der KSM ergibt sich also genau so, wie die Frequenz im Rotor einer Induktionsmaschine (oder auch Asynchronmaschine genannt) mit Schleifringläufer. Die KSM hat dabei die resultierende Polpaarzahl  $p = p_1 - p_2$ .

Mit den Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  lässt sich entsprechend die Drehzahl der Maschine bestimmen:

$$n = \frac{f_1 - f_2}{p_1 - p_2} = \frac{f_1 - f_2}{p} \quad (7)$$

### 4 Analyse des elektromagnetischen Verhaltens von Rotorwicklungen für Kaskadenmaschinen und für unsymmetrische Wicklungen in Drehfeldmaschinen

Für Kaskadenmaschinen werden Rotorwicklungen eingesetzt, die mit einem Rotorstromsystem gleichzeitig die beiden Grundfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  erzeugen. Sie weisen z. T. viele verschiedene Zweige auf, die in Knoten miteinander verbunden sind. Ein Beispiel zeigt Abb. 3 mit 14 Knoten mit 3 bzw. 5 Leitern.

Diese Wicklung wiederholt sich  $p = 6$ -Mal entlang des Umfangs. Damit ist sie aus Sicht der beiden Grundfelder  $p_1 = 2$  und  $p_2 = -4$  unsymmetrisch gegenüber den jeweiligen Grundfeldern verteilt.

Die beiden Grundfelder induzieren in der Wicklung Spannungen, die zu Strömen in den verschiedenen Zweigen führen. Die Zweige sind damit sowohl induktiv über die Magnetfelder, als auch galvanisch über die Schaltung der Rotorwicklung gekoppelt. Die Größe der Ströme lässt sich nicht einfach aus Symmetriebetrachtungen angeben. Im Folgenden wird eine Analyse solcher Wicklungen durchgeführt, so dass die Wirkung der Rotorwicklung für den Betrieb der Kaskadenmaschine durch Ersatzschaltbildgrößen angegeben werden kann.

Resultierend entstehen Spannungsgleichungen, die den Spannungsgleichungen einer Induktionsmaschine mit SchleifringRotor gleichen (s. Abschn. 6.2).

Unsymmetrische Wicklungen kommen aber auch bei Drehfeldmaschinen mit einer Polpaarzahl vor. So führen Rotorfehler bei Induktionsmaschinen oder Synchronmaschinen zu einer unsymmetrischen Wicklung im Rotor. Dies können z. B. Stabbrüche oder Lunker bei KäfigRotorn oder im Dämpferkäfig sein.

Die Verteilung der Ströme ist dann durch die induktiven und galvanischen Kopplungen zwischen den Leitern des Rotors bestimmt. Das vorgestellte Verfahren zur Analyse der Rotorwicklung eignet sich auch zur Behandlung dieser Effekte.

Die folgende Analyse des Verhaltens unsymmetrischer Wicklungen konzentriert sich auf die Beschreibung der Kopplung zwischen verschiedenen Wicklungsteilen. Dabei wird durchweg eine unsymmetrische Rotorwicklung betrachtet. Die Überlegungen lassen sich aber auch auf unsymmetrische Statorwicklungen übertragen.

Für Kaskadenmaschinen wird speziell die Kopplung zwischen den beiden Grundfeldern mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  behandelt, die von den beiden Statorwicklungsteilen erzeugt werden. Daneben existieren natürlich unendlich viele Oberfelder mit den Polpaarzahlen  $v_1, v_2, 1 \dots$ . Jedes dieser Felder kann prinzipiell im Rotor induzieren und in der Rotorwicklung Ströme hervorrufen, die das Feld abdämpfen. Dieser Vorgang wird durch den komplexen Felddämpfungsfaktor  $\underline{D}_v$  beschrieben.

Daneben erzeugen die Rotorströme neue Felder, die

wieder im Stator Spannungen induzieren können.

Trägt der Rotor eine symmetrische Wicklung, z. B. eine Käfigwicklung, so lässt sich die prinzipielle Rotorstromverteilung leicht bestimmen. Der Felddämpfungsfaktor und das Feldspektrum lassen sich dann in geschlossener Form angeben. Die entsprechenden Zusammenhänge sind z. B. in [1] dargestellt.

Ist die Rotorwicklung hingegen unsymmetrisch aufgebaut, so lässt sich die Stromverteilung nicht ohne weiteres angeben. Vielfach besitzen die Wicklungen parallel geschaltete Wicklungsteile, die die mathematische Behandlung weiter erschweren.

Eine Käfigwicklung mit mehrfachen Stabbrüchen hat z. B.  $N_R - k_{\text{bruch}}$  parallel geschaltete Stäbe, wenn  $k_{\text{bruch}}$  die Zahl der gebrochenen Stäbe beschreibt.

Im Folgenden wird gezeigt, wie sich die Stromverteilung und die Rückwirkung solcher unsymmetrischer Wicklungen berechnen lässt.

#### 4.1 Netzwerkanalyse der Rotorwicklung für eine Einschichtwicklung

Um die Wirkung der Rotorwicklung übersichtlich beschreiben zu können, soll zunächst nur ein einziges Feld der Polpaarzahl  $\nu$  des Stators betrachtet werden. Weiter wird nur der eingeschwingene Zustand betrachtet, so dass komplexe Zeitzeiger zur Beschreibung herangezogen werden können. Die Verallgemeinerung auf mehrere Felder  $\nu_1, \nu_2 \dots$  und auf die zwei Grundfelder  $p_1$  und  $p_2$  der Kaskadenmaschine wird in Abschnitt 5 vorgenommen.

Besitzt die Rotorwicklung mehrere geschlossene Stromkreise, können sich verschiedene Rotorströme ausbilden. Diese Ströme können durch einen Spaltenvektor  $\underline{I}_R$  beschrieben werden. Die Spannungsgleichungen des Stators und des Rotors ergeben sich dann allgemein zu:

$$\underline{U}_{S\nu} = R_S \underline{I}_{S\nu} + j\omega_{S\nu} L_{\sigma S\nu} \underline{I}_{S\nu} + j\omega_{S\nu} L_{S\nu} \underline{I}_{S\nu} + j\omega_{S\nu} \underline{M}_{S\nu R} \underline{I}_R \quad (8)$$

$$\underline{U}_R = \underline{R}_R \underline{I}_R + j\omega_{R\nu} L_R \underline{I}_R + j\omega_{R\nu} \underline{M}_{R\nu S} \underline{I}_{S\nu} \quad (9)$$

Hierin sind  $\underline{M}_{S\nu R}$  ein Zeilenvektor, der die induktive Kopplung der Rotorströme mit der Statorspannung beschreibt. Der Spaltenvektor  $\underline{M}_{R\nu S}$  gibt die induktive Kopplung des Statorstroms mit den Rotorspannungen an. Die Spannungen im Rotor finden sich im Spaltenvektor  $\underline{U}_R$ .

Für den Stator wird eine gewöhnliche Drehstromwicklung betrachtet. Die hier verwendeten Induktivitäten sind die zu dem Drehfeld mit der Polpaarzahl  $\nu$  gehörenden Induktivitäten. Für die Hauptinduktivität gilt:

$$L_{S\nu} = 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{\mu_0}{\delta} \cdot \frac{m_S \cdot \xi_{S\nu}^2 \cdot w_S^2}{\pi^2 \cdot \nu^2} \quad (10)$$

mit dem Bohrungsradius  $r$ , dem magnetisch wirksamen Luftspalt  $\delta$ , der magnetisch wirksamen Paketlänge  $l$  und dem Wicklungsfaktor  $\xi_{S\nu}$  für die Polpaarzahl  $\nu$  sowie der Strangwindungszahl  $w_S$  bei in Reihe geschalteten Leitern. Die Berechnung ist für Drehfeldmaschinen z. B. in [1] und für Kaskadenmaschinen in [5] dargestellt. Dort finden sich die Beziehungen zur Berechnung der

Streuinduktivität  $L_{\sigma S\nu}$ , die u. a. die Nutstreuung und die Stirnkopfstreuung enthält, und die Gleichungen zur Berechnung des Wicklungswiderstandes  $R_S$ .

Die Induktivitäten des Rotors sind die Induktivitäten der Schleifen des Rotornetzwerks. Sie werden später durch Drehfeldinduktivitäten ausgedrückt. Das gleiche gilt für die Gegeninduktivitäten. Sie gelten hier zwischen den Strömen des Rotornetzwerks und den Rotorschleifen sowie der Statorwicklung. Auch diese Gegeninduktivitäten werden später durch Drehfeldinduktivitäten dargestellt.

Für die Gegeninduktivitätsvektoren zwischen Stator und Rotor gilt bei Vernachlässigung der Eisenverluste, dass sie zueinander konjugiert komplex transponiert sind<sup>1</sup>:

$$\underline{M}_{S\nu R} = \underline{M}_{R\nu S}^* \quad (11)$$

Die Gegeninduktivitäten können komplex sein, da die Bezugssysteme des Statorstromes und der einzelnen Rotorströme nicht unbedingt den gleichen Ursprung haben. Ein räumlicher Winkel zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen lässt sich bei konstanten Frequenzen in einen zeitlichen Phasenwinkel umrechnen, was sich hier in den komplexen Gegeninduktivitäten ausdrückt.

Zweckmässigerweise wählt man jedoch für das Stator- und das Rotorkoordinatensystem den gleichen Ursprung. In diesem Fall werden die Vektoren der Gegeninduktivitäten bei Vernachlässigung der Eisenverluste reell:

$$\underline{M}_{S\nu R} = \underline{M}_{S\nu R} = \underline{M}_{R\nu S}^T = \underline{M}_{R\nu S} \quad (12)$$

Der Zusammenhang zwischen der Stator- und der Rotorfrequenz wird durch die mechanische Drehzahl hergestellt:

$$\omega_{R\nu} = \omega_{S\nu} - \nu \cdot \omega_{\text{mech}} \quad (13)$$

$$f_{R\nu} = f_{S\nu} - \nu \cdot n_{\text{mech}} \quad (14)$$

In den Gleichungen treten verschiedene Rotorströme in Form der Matrix  $\underline{I}_R$  auf. Es stellt sich die Frage, welche Rotorströme sinnvoll zur Beschreibung herangezogen werden können.

Um diese Frage zu klären, wird die Rotorwicklung als ein Netzwerk aufgefasst, dessen Zweige aus den Leitern in den Nuten und im Stirnraum gebildet werden. Die numerische Behandlung solcher Netzwerkprobleme wird z. B. in [19] beschrieben. Als Zweig des Netzwerks kann jeder Teil der Wicklung aufgefasst werden, dessen Verhalten durch einen einzigen Strom und eine einzige Spannung zwischen seinen beiden Enden gekennzeichnet werden kann. So können dies einzelne Stäbe oder Schaltverbinder sein. Die Zweige einer Spulenwicklung können einzelne Spulen, Spulengruppen oder ganze Stränge sein.

Die gesamte Rotorwicklung setzt sich aus  $g$  unabhängigen Wicklungsteilen mit insgesamt  $z$  Zweigen zusammen, die mit  $k$  Knoten miteinander verbunden sind.

Als Beispiel wird die Wicklung nach Bild 6 betrachtet. In acht von insgesamt zwölf Nuten befinden sich Stäbe,

<sup>1</sup>Die Operation konjugiert komplex transponiert wird hier und in allen folgenden Gleichungen mit dem \* gekennzeichnet.

von denen jeweils vier miteinander verbunden sind. Es ergeben sich zwei Wicklungsteile mit insgesamt zwölf Zweigen, die durch acht Knoten miteinander verbunden sind.

Von den  $z = 12$  verschiedenen Zweigströmen lassen sich nur

$$z_v = z - k + g = 12 - 8 + 2 = 6 \quad (15)$$

Ströme frei wählen, die übrigen  $z - z_v = 6$  Zweigströme sind durch Schaltungszwang durch die  $z_v$  Ströme eindeutig bestimmt.

Welche Zweige zu den  $z_v$  Zweigen mit unabhängigen Zweigströmen gehören, kann mit Hilfe des Baumes der Wicklung ermittelt werden.

Dazu wird ein Teil der Zweige zu einem Baum zusammengefasst, so dass jeder Knoten mit Baumzweigen verbunden ist und es genau eine Verbindung zwischen zwei Knoten durch Baumzweige gibt.

Die Zweige, die nicht zu den Baumzweigen gehören, führen die unabhängigen Zweigströme. Man nennt sie Verbindungszweige. Jeder Verbindungszweig bildet mit dem Baum eine eindeutige Masche, in der der Verbindungszweigstrom der Maschenstrom ist. Die Ströme in den Baumzweigen setzen sich aus den Verbindungszweigströmen zusammen.

Für die Beispielwicklung könnte ein Baum nach Abb. 7 gewählt werden. Die Baumzweige (durchgezogene Linien in Abb. 7) verbinden alle Knoten miteinander. Die Verbindungszweige (gestrichelte Linien in Abb. 7) verbinden jeweils zwei Knoten und führen die unabhängigen Zweigströme.

Somit sind die Zweige  $\boxed{1}$   $\boxed{3}$   $\boxed{5}$   $\boxed{8}$   $\boxed{9}$  und  $\boxed{12}$  Baumzweige, die die abhängigen Baumströme führen und die Zweige  $\boxed{2}$   $\boxed{4}$   $\boxed{6}$   $\boxed{7}$   $\boxed{10}$  und  $\boxed{11}$  die Verbindungszweige, die die unabhängigen Maschenströme führen.

Das Gleichungssystem braucht nun noch für die unabhängigen Maschenströme aufgestellt zu werden. Die Spaltenvektoren  $\underline{I}_{R \text{ masche}}$  und  $\underline{U}_{R \text{ masche}}$  enthalten die unabhängigen Maschenströme und zugehörigen Spannungen.

$$\underline{U}_{Sv} = R_S \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{\sigma Sv} \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{Sv} \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} \mathbf{M}_{RSv \text{ masche}}^T \underline{I}_{R \text{ masche}} \quad (16)$$

$$\underline{U}_{R \text{ masche}} = \mathbf{R}_{R \text{ masche}} \underline{I}_{R \text{ masche}} + j\omega_{Rv} \mathbf{L}_{R \text{ masche}} \underline{I}_{R \text{ masche}} + j\omega_{Rv} \mathbf{M}_{RSv \text{ masche}} \underline{I}_{Sv} \quad (17)$$

Die quadratischen Widerstands- und Induktivitätsmatrizen  $\mathbf{R}_{R \text{ masche}}$  und  $\mathbf{L}_{R \text{ masche}}$  enthalten die Widerstände und Induktivitäten, mit denen die unabhängigen Maschenströme miteinander galvanisch und induktiv gekoppelt sind. Der Zeilenvektor  $\mathbf{M}_{RSv \text{ masche}}^T$  gibt die Gegeninduktivitäten zwischen den Rotorströmen und der Statorspannung an. Umgekehrt enthält der Spaltenvektor  $\mathbf{M}_{RSv \text{ masche}}$  die Gegeninduktivität zwischen dem Statorstrom und den Rotorspannungen.

Da keine zusätzlichen Spannungsquellen im Rotorkreis sind, ist die Summe aller Spannungen entlang einer

Masche gleich Null:

$$\underline{U}_{R \text{ masche}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Die Matrix  $\mathbf{R}_{R \text{ masche}}$  enthält auf der Hauptdiagonalen die positive Summe aller Widerstände der Zweige, die zu dieser Masche gehören.

Die übrigen Einträge enthalten die Summen der Widerstände der Zweige, die zu zwei Maschen gleichzeitig gehören. Diese Summen werden positiv eingetragen, wenn die Zählpfeile der beiden Maschenströme in den gemeinsamen Zweigen in die gleiche Richtung zeigen, negativ, wenn sie in verschiedene Richtungen zeigen.

Diese Werte lassen sich also aus den Leiterabmessungen und der Wicklungsanordnung ohne größere Schwierigkeiten bestimmen.

Die Matrizen  $\mathbf{L}_{R \text{ masche}}$  und  $\mathbf{M}_{RSv \text{ masche}}$  enthalten die Selbstinduktivitäten der Maschen, die Gegeninduktivitäten zwischen zwei Maschen und die Gegeninduktivitäten zwischen den Rotormaschen und der Statorwicklung über das Luftspaltfeld der Polpaarzahl  $v$ . In jedem Fall ist das Luftspaltfeld an der Bildung dieser Induktivitäten beteiligt.

Falls ein Teil der Selbstinduktivitäten durch Streuinduktivitäten beschrieben werden kann, an denen das Luftspaltfeld nicht beteiligt ist und die nur zu einem einzigen Zweig gehören, so lassen sich diese wie die Widerstände behandeln. Diese Streuinduktivitäten lassen sich in einer Matrix  $\mathbf{L}_{\sigma R \text{ masche}}$  zusammenfassen und in die Spannungsgleichungen einbringen:

$$\underline{U}_{Sv} = R_S \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{\sigma Sv} \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{Sv} \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} \mathbf{M}_{RSv \text{ masche}}^T \underline{I}_{R \text{ masche}} \quad (19)$$

$$\underline{U}_{R \text{ masche}} = \mathbf{R}_{R \text{ masche}} \underline{I}_{R \text{ masche}} + j\omega_{Rv} \mathbf{L}_{\sigma R \text{ masche}} \underline{I}_{R \text{ masche}} + j\omega_{Rv} \mathbf{L}_{R \text{ masche}} \underline{I}_{R \text{ masche}} + j\omega_{Rv} \mathbf{M}_{RSv \text{ masche}} \underline{I}_{Sv} \quad (20)$$

Zur Beschreibung des Luftspaltfeldes und der mit dem Luftspaltfeld verknüpften Induktivitäten eignen sich die Drehfeldtheorie und das Kalkül der Symmetrischen Komponenten [16, 17].

Hier wird das Kalkül der Symmetrischen Komponenten angewandt. Dazu werden die Nutdurchflutungen durch die Maschenströme ausgedrückt.

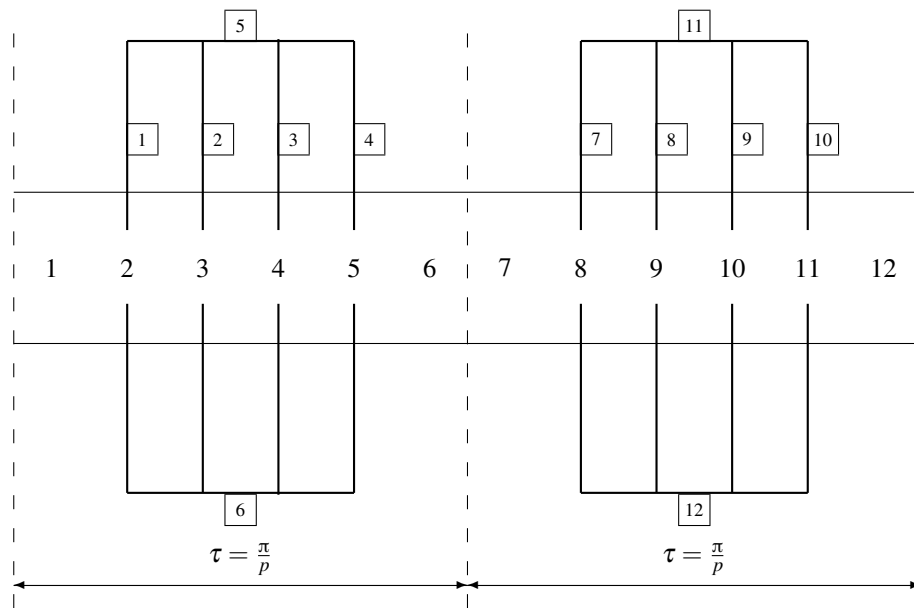
Man erhält den Vektor der Nutdurchflutungen zu

$$\underline{I}_{R \text{ nut}} = \mathbf{W} \cdot \underline{I}_{R \text{ masche}} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_{R \text{ nut}} = \begin{pmatrix} I_{R \text{ nut } 1} \\ \vdots \\ I_{R \text{ nut } N} \end{pmatrix} \quad (21)$$

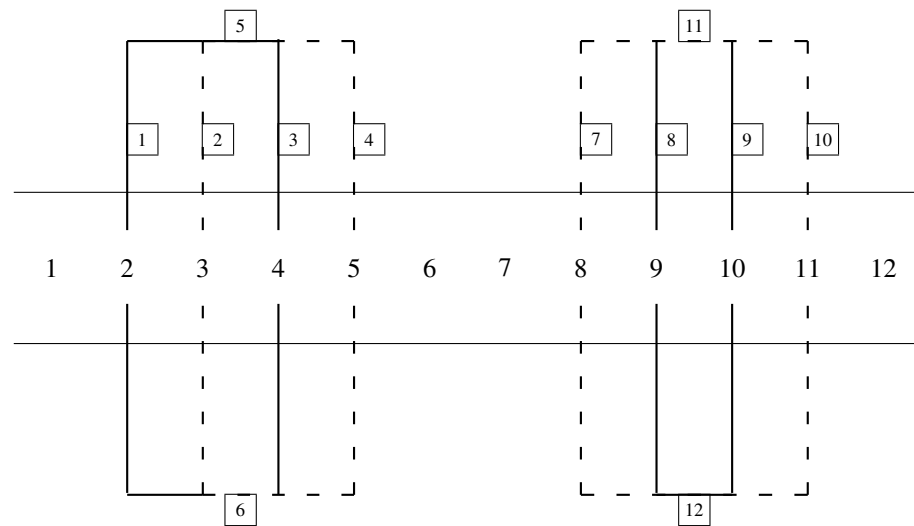
Die Matrix  $\mathbf{W}$  beschreibt den Zusammenhang zwischen Nutdurchflutungen und Maschenströmen. In dieser Form wird nur eine Einsichtwicklung erfasst. Die Erweiterung auf mehrere Lagen der Rotorwicklung wird in Abschnitt 8 behandelt. Entsprechend ergeben sich die Spannungen der Maschen aus den zu den Nuten gehörenden Spannungen:

$$\underline{U}_{R \text{ masche}} = \mathbf{W}^T \cdot \underline{U}_{R \text{ nut}} \quad (22)$$





**Abbildung 6** Unsymmetrischer Käfig mit zwei Wicklungsteilen und zwölf Zweigen



**Abbildung 7** Baum des unsymmetrischen Käfigs, Baumzweige mit den abhängigen Zweigströmen:  $\boxed{1}$   $\boxed{3}$   $\boxed{5}$   $\boxed{8}$   $\boxed{9}$  und  $\boxed{12}$ , durchgezogene Linien, Verbindungs Zweige mit den unabhängigen Zweigströmen:  $\boxed{2}$   $\boxed{4}$   $\boxed{6}$   $\boxed{7}$   $\boxed{10}$  und  $\boxed{11}$ , gestrichelte Linien

Ein entsprechendes Vorgehen für die Zuordnung zwischen Nutdurchflutungen und Strangströmen einer Statorwicklung findet sich in [6, 11, 18].

Für die Beispielwicklung nach Abb. 6 mit den Verbindungszweigen  $\boxed{2}$   $\boxed{4}$   $\boxed{6}$   $\boxed{7}$   $\boxed{10}$  und  $\boxed{11}$  ergibt sich für die Nutdurchflutungen:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{R \text{ nut}} &= \begin{pmatrix} \underline{I}_{R \text{ nut } 1} \\ \underline{I}_{R \text{ nut } 2} \\ \underline{I}_{R \text{ nut } 3} \\ \vdots \\ \underline{I}_{R \text{ nut } 12} \end{pmatrix} = \underline{W} \cdot \underline{I}_{R \text{ masche}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_{R \text{ masche } \boxed{2}} \\ \underline{I}_{R \text{ masche } \boxed{4}} \\ \underline{I}_{R \text{ masche } \boxed{6}} \\ \underline{I}_{R \text{ masche } \boxed{7}} \\ \underline{I}_{R \text{ masche } \boxed{10}} \\ \underline{I}_{R \text{ masche } \boxed{11}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

## 4.2 Transformation in symmetrische Komponenten

Die Nutdurchflutungen erzeugen im Luftspalt Magnetfelder, die in der Statorwicklung und in der Rotorwicklung Spannungen induzieren. Für eine gute Erfassung der induzierenden Wirkung eignet sich die Drehfeldtheorie für elektrische Maschinen. Die Drehfelder der Rotorwicklung lassen sich wiederum gut mit Hilfe der symmetrischen Komponenten der Nutdurchflutungen berechnen.

Die Nutdurchflutungen lassen sich mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\underline{T}^*$  in ihre Symmetrischen Komponenten transformieren. Die Transformationsmatrix  $\underline{T}^*$  und die zugehörige Matrix  $\underline{T}$  zur Rücktransformation berechnen sich mit folgenden Beziehungen:

$$\underline{T}^* = \frac{1}{\sqrt{N_R}} \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \underline{T}_{nk}^* & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{T}_{nk}^* = e^{j\frac{2\pi}{N_R} \cdot nk} \quad (24)$$

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{N_R}} \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \underline{T}_{nk} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{T}_{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N_R} \cdot nk} \quad (25)$$

Dabei gilt für die Ordnungszahlen  $n$  der Symmetrischen Komponenten:

$$-\frac{N_R}{2} < n \leq \frac{N_R}{2}, \quad N_R = \text{Rotornutzahl} \quad (26)$$

Für die Nutnummern gilt:

$$k = 0, 1, 2, \dots, N_R - 1 \quad (27)$$

Die Matrizen sind zyklisch symmetrisch, so dass gilt:

$$\underline{T}^{-1} = \underline{T}^* \quad \text{und} \quad \underline{T}^* \cdot \underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \underline{E} \quad (28)$$

Der Spaltenvektor der Symmetrischen Komponenten der Rotornutdurchflutungen  $\underline{I}_{R \text{ Sk}}$  ergibt sich mit der Transformationsmatrix  $\underline{T}^*$  aus dem Spaltenvektor  $\underline{I}_{R \text{ nut}}$  der Nutdurchflutungen:

$$\underline{I}_{R \text{ Sk}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \underline{I}_{R \text{ Sk } n} \\ \vdots \end{pmatrix} = \underline{T}^* \cdot \underline{I}_{R \text{ nut}} \quad (29)$$

Es existieren dabei ebensoviele Symmetrische Komponenten wie Nutdurchflutungen.

Entsprechend können die Spannungen transformiert werden:

$$\underline{U}_{R \text{ nut}} = \underline{T} \cdot \underline{U}_{R \text{ Sk}} \quad (30)$$

Ersetzt man die Nutdurchflutungen durch die Maschenströme und die Spannungen zu einer Nut durch die Symmetrischen Komponenten, so erhält man:

$$\underline{I}_{R \text{ Sk}} = \underline{T}^* \cdot \underline{W} \cdot \underline{I}_{R \text{ masche}} \quad (31)$$

$$\underline{U}_{R \text{ masche}} = \underline{W}^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{U}_{R \text{ Sk}} \quad (32)$$

Der Anteil der induzierten Spannung in den Maschen aufgrund der Induktivitäten  $\underline{L}_{R \text{ masche}}$  und den Gegeninduktivitäten mit dem Stator ergibt sich entsprechend Gl. (20) zu

$$\underline{U}_{iR \text{ masche}} = j\omega_{Rv} \underline{L}_{R \text{ masche}} \cdot \underline{I}_{R \text{ masche}} + j\omega_{Rv} \underline{M}_{Rsv} \underline{I}_{Sv} \quad (33)$$

Nach Gl. (32) gilt aber auch

$$\underline{U}_{iR \text{ masche}} = \underline{W}^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{U}_{iR \text{ Sk}} \quad (34)$$

Der Spannungsvektor  $\underline{U}_{iR \text{ Sk}}$  lässt sich in zwei Anteile zerlegen, die den Anteilen nach Gl. (33) entsprechen:

$$\underline{U}_{iR \text{ masche}} = j\omega_R \underline{W}^T \underline{T} \text{diag}(\underline{L}_{R \text{ Sk}}) \underline{I}_{R \text{ Sk}} + j\omega_R \underline{W}^T \underline{T}_{Sv} \underline{M}_{Rsv \text{ Sk}} \underline{I}_{Sv} \quad (35)$$

Hierin bedeuten  $\text{diag}(\underline{L}_{R \text{ Sk}})$  die Selbstinduktivitätsmatrix für die Symmetrischen Komponenten der Rotorströme,  $\underline{M}_{Rsv \text{ Sk}}$  die Gegeninduktivität zwischen Stator und Rotor für ein Feld der Polpaarzahl  $v$  und  $\underline{T}_{Sv}$  die Matrix zur Transformation der vom Stator induzierten Spannung in die zu den Nuten gehörenden Spannungen.

Da die verschiedenen Symmetrischen Komponenten gleicher Frequenz bei konstantem Luftspaltleitwert nicht miteinander gekoppelt sind, handelt es sich bei der Selbstinduktivitätsmatrix  $\text{diag}(\mathbf{L}_{\text{rsk}})$  um eine Diagonalmatrix. Auf der Hauptdiagonalen stehen die Selbstinduktivitäten für die einzelnen Symmetrischen Komponenten:

$$\text{diag}(\mathbf{L}_{\text{rsk}}) = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & L_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (36)$$

Sie setzen sich aus den drei Anteilen aufgrund des Luftspaltfeldes, des Nutquerfeldes und des Stirnraumfeldes zusammen:

$$L_n = L_{hn} + L_{\sigma \text{nut}} + L_{\sigma \text{stirn}} \quad (37)$$

Die Berechnung der Streufeldinduktivitäten für das Nutstrefeld  $L_{\sigma \text{nut}}$  und das Stirnstrefeld  $L_{\sigma \text{stirn}}$  sind z. B. in [1] und für Kaskadenmaschinen in [5] dargestellt.

Die Luftspaltinduktivität  $L_{hn}$  für die symmetrische Komponente  $n$  berechnet sich bei in Nutmitte konzentriert angenommener Durchflutung nach folgender Gleichung:

$$L_{hn} = \frac{\mu_0}{\delta} \frac{2\pi r l}{N_R} \cdot \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{N_R} \cdot n\right)} \quad (38)$$

Diese Induktivität beschreibt die induzierende Wirkung aller zur symmetrischen Komponente  $n$  gehörenden Felder mit den Polpaarzahlen

$$v = n + g \cdot N_R \quad \text{mit} \quad g = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (39)$$

die aufgrund der diskreten Verteilung der Nutdurchflutungen immer gemeinsam auftreten.

Für die einspaltige Matrix  $\underline{\mathbf{T}}_{Sv}$  gilt:

$$\underline{\mathbf{T}}_{Sv} = \frac{1}{\sqrt{N_R}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \underline{\mathbf{T}}_k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{T}}_k = e^{-j \frac{2\pi}{N_R} \cdot vk} \quad (40)$$

$$k = 0, 1, 2 \dots N_R - 1$$

Der Stromvektor  $\underline{\mathbf{I}}_{R \text{Sk}}$  in Gl. (35) lässt sich mit Gl. (31) ersetzen:

$$\underline{\mathbf{U}}_{iR \text{masche}} = j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \text{diag}(\mathbf{L}_{R \text{Sk}}) \underline{\mathbf{T}}^* \mathbf{W} \underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}}_{Sv} M_{RSv \text{Sk}} \underline{\mathbf{I}}_{Sv} \quad (41)$$

Durch Hinzunahme der ohmschen Spannungsabfälle und der Spannungsabfälle aufgrund der Streuinduktivitäten  $L_{\sigma R \text{masche}}$  nach Gl. (20) erhält man schließlich die Spannungsgleichung der kurzgeschlossenen Rotorwicklung:

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{R \text{masche}} \underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} + j\omega_R L_{\sigma R \text{masche}} \underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \text{diag}(\mathbf{L}_{R \text{Sk}}) \underline{\mathbf{T}}^* \mathbf{W} \underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}}_{Sv} M_{RSv \text{Sk}} \underline{\mathbf{I}}_{Sv} \quad (42)$$

Geht man für die Statorwicklung entsprechend vor, so erhält man die Spannungsgleichung

$$\underline{\mathbf{U}}_{Sv} = R_S \underline{\mathbf{I}}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{\sigma Sv} \underline{\mathbf{I}}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{Sv} \underline{\mathbf{I}}_{Sv} + j\omega_{Sv} M_{RSv \text{Sk}} \underline{\mathbf{T}}_{Sv}^* \mathbf{W} \underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} \quad (43)$$

Die in den Gleichungen (42) und (43) vorkommenden Selbst- und Gegeninduktivitäten für die Symmetrischen Komponenten können in üblicher Weise bestimmt werden (siehe Gln. (10), (37), (38), (46)). Für die Induktivitäten können die üblichen Berechnungsmethoden für Drehfeldmaschinen angewendet werden. Die zunächst noch unbekanntenen Mascheninduktivitäten sind also durch bekannte Induktivitäten für Symmetrische Komponenten ersetzt worden.

### 4.3 Berechnung der Rotorströme bei der Berücksichtigung eines Strombelages der Statorwicklung

Ausgangspunkt für die weitere Berechnung sind die Spannungsgleichungen (42) und (43). Die Rotorspannungsgleichung lässt sich nach dem Vektor der Rotorströme auflösen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{R \text{masche}} + j\omega_R L_{\sigma R \text{masche}} \\ + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \text{diag}(\mathbf{L}_{R \text{Sk}}) \underline{\mathbf{T}}^* \mathbf{W} \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} = -j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}}_{Sv} \cdot M_{RSv \text{Sk}} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{Sv} \quad (44)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{R \text{masche}} = - \left( \mathbf{R}_{R \text{masche}} + j\omega_R L_{\sigma R \text{masche}} + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \text{diag}(\mathbf{L}_{R \text{Sk}}) \underline{\mathbf{T}}^* \mathbf{W} \right)^{-1} \cdot j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}}_{Sv} M_{RSv \text{Sk}} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{Sv} \quad (45)$$

Die Gegeninduktivität  $M_{RSv \text{Sk}}$  zwischen Stator und Rotor für das Feld mit der Polpaarzahl  $v$  ergibt sich für eine in Nutmitte konzentriert angenommene Durchflutung nach folgender Gleichung [5]:

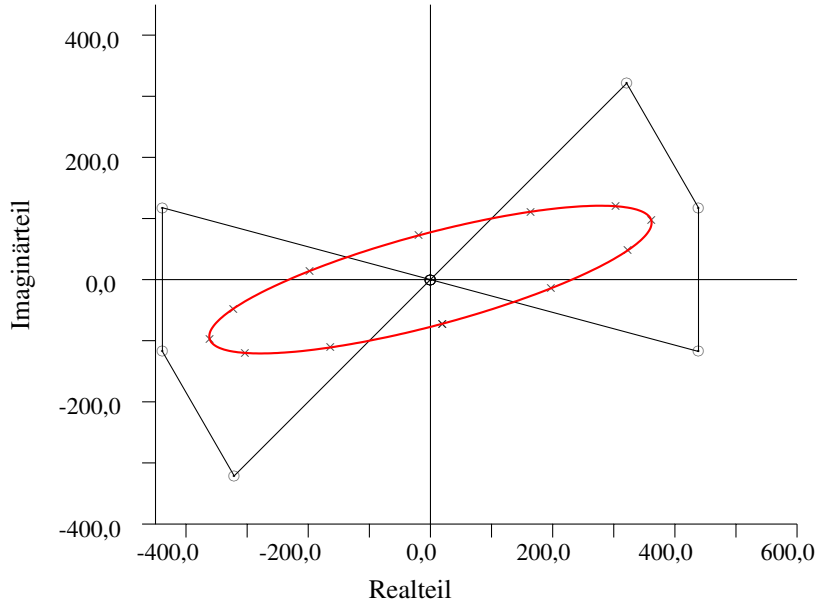
$$M_{RSv \text{Sk}} = \frac{\mu_0}{\delta} 2\pi r l \sqrt{m_S N_R} \cdot \frac{\xi_{Sv}^{WS}}{2\pi^2 v^2} \cdot \xi_{\text{Schr } v} \quad (46)$$

Der Faktor  $\xi_{\text{Schr } v}$  berücksichtigt dabei eine Schrägung des Rotors gegenüber dem Stator.

Damit sind die Rotormaschenströme bei gegebenem Statorstrom bekannt. Mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{W}$  lassen sich aus den Maschenströmen die Nutdurchflutungen gewinnen:

$$\underline{\mathbf{I}}_{R \text{nut}} = -\mathbf{W} \left( \mathbf{R}_{R \text{masche}} + j\omega_R L_{\sigma R \text{masche}} + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \text{diag}(\mathbf{L}_{R \text{Sk}}) \underline{\mathbf{T}}^* \mathbf{W} \right)^{-1} \cdot j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}}_{Sv} M_{RSv \text{Sk}} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{Sv} \quad (47)$$

Die Nutdurchflutungen lassen sich übersichtlich in Form eines Gorges-Polygons [15] darstellen. Die einzelnen



**Abbildung 8** Durchflutungspolygon der Beispielwicklung für einen Statorstrombelag mit der Polpaarzahl  $p_1 = 1$  und Durchflutungskurve mit den Polpaarzahlen  $p_1 = 1$  und  $p_2 = -1$ . Im Durchflutungspolygon ist die Lage der Nuten durch  $\odot$ , in der Durchflutungskurve durch  $\times$  gekennzeichnet. [5]

Punkte  $\underline{P}_{\text{nut } j}$  des Polygons in der komplexen Ebene ergeben sich aus den Nutdurchflutungen zu:

$$\underline{P}_{\text{nut } j} = \sum_{i=1}^j \underline{I}_{\text{nut } i} - \underline{s}_{\text{nut}} \quad (48)$$

wobei durch die Größe  $\underline{s}_{\text{nut}}$  der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des Polygons gelegt wird. Sie ergibt sich zu:

$$\underline{s}_{\text{nut}} = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} (N_R - i + 1) \cdot \underline{I}_{\text{nut } i} \quad (49)$$

Das Durchflutungspolygon der Beispielwicklung nach Bild 6 zeigt Bild 8. Die Lage der Nuten ist durch Kreise  $\odot$  gekennzeichnet.

Das Durchflutungspolygon enthält die Felderreggerkurven aller Felder, die der Rotor generiert.

Bei der Betrachtung von Käfigbrüchen in Induktionsmaschinen oder bei der Analyse des unsymmetrischen Käfigs in Synchronmaschinen interessieren vorrangig die Rückwirkung auf das Grundfeld  $v = p$  und die Erzeugung eines gegenläufigen Drehfeldes  $\mu = -p$ .

Für den Betrieb der Kaskadenmaschine interessieren vorrangig die Felderreggerkurven der beiden Grundfelder  $p_1$  und  $p_2$ . Trägt man die kontinuierlichen Felderreggerortskurven der beiden Grundfelder in das Durchflutungspolygon ein, so ist schnell zu erkennen, wie gut das Polygon mit der Felderreggerkurve der beiden Grundfelder übereinstimmt.

Aus dem Vektor der Nutdurchflutungen  $\underline{I}_{\text{r nut}}$  erhält man mit Gleichung (29) den Vektor der Symmetrischen

Komponenten:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{R \text{ sk}} = & -\underline{T}^* \mathbf{W} \left( \mathbf{R}_{R \text{ masche}} + j\omega_R \mathbf{L}_{\sigma R \text{ masche}} \right. \\ & \left. + j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \text{diag}(\underline{L}_{R \text{ sk}}) \underline{\mathbf{T}}^* \mathbf{W} \right)^{-1} \\ & \cdot j\omega_R \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}}_{Sv} \underline{M}_{RSv \text{ sk}} \cdot \underline{I}_{Sv} \quad (50) \end{aligned}$$

Die zu den Feldern  $v$  und  $\mu$  gehörenden Symmetrischen Komponenten der Nutdurchflutungen  $\underline{I}_{r \text{ sk } v}$  und  $\underline{I}_{r \text{ sk } \mu}$  führen auf die zugehörigen Felderreggerungen  $\underline{V}_v$  und  $\underline{V}_\mu$  bei in Nutmitte konzentriert angenommener Durchflutung:

$$\underline{V}_{-p_1} = j \cdot \sqrt{N_R} \cdot \underline{I}_{r \text{ sk } p_1} \quad (51)$$

$$\underline{V}_{-p_2} = j \cdot \sqrt{N_R} \cdot \underline{I}_{r \text{ sk } p_2} \quad (52)$$

Die Felderreggerkurve der Felder  $p_1$  und  $p_2$  ergibt sich dann aus der Summe zweier Kreise:

$$\underline{v} = -\underline{V}_{-p_1} \cdot e^{jp_1 \cdot x_R} - \underline{V}_{-p_2} \cdot e^{jp_2 \cdot x_R} \quad (53)$$

In Bild 8 ist zusätzlich zum Polygon der Nutdurchflutungen die Felderreggerkurve der Polpaarzahlen  $p_1 = 1$  und  $p_2 = -1$  eingetragen. Die Lage der Nuten ist in der Durchflutungskurve durch  $\times$  gekennzeichnet.

#### 4.3.1 Durchflutungskurve einer Wicklung für eine KSM

Mit den dargestellten Gleichungen wird nun die Durchflutungskurve einer Wicklung für eine Kaskadenmaschine behandelt. Bei der Kaskadenmaschine soll die Rotorwicklung zwei Grundfelder  $p_1$  und  $p_2$  der Statorwicklungen so magnetisch koppeln, dass sich ein Verhalten ähnlich wie bei einer Schleifringrotormaschine ergibt.

Damit eine Kaskadenmaschine gut funktioniert, muss die Durchflutungskurve der Wicklung möglichst dicht an



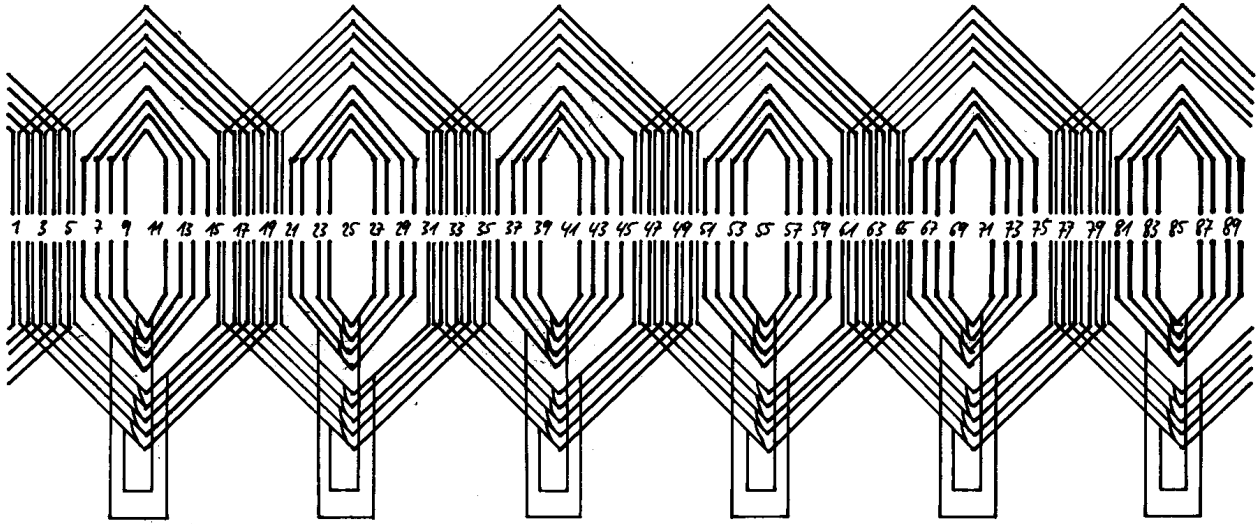


Abbildung 9 Rotorwicklung für  $p = 6$  mit  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = -4$ , Zweischichtwicklung mit  $N_R = 90$  Nuten [5]

der Durchflutungskurve aus den zwei Grundfeldern  $p_1$  und  $p_2$  liegen.

Als Beispiel wird hier eine Kaskadenmaschine mit den Polpaarzahlen  $p_1 = 2$  und  $p_2 = -4$  betrachtet. Die Wicklung zeigt Bild 9. Es handelt sich um eine Zweischichtwicklung bestehend aus 6 Spulengruppen mit jeweils 9 konzentrischen Spulen, die zwei Zonen mit je 9 Nuten Breite bilden. Die Spulengruppen sind kurzgeschlossen und von den übrigen Spulengruppen galvanisch getrennt. Insgesamt bleiben 12 Nuten unbewickelt. In der Wicklung können sich 6 unabhängige Ströme ausbilden.

Die Durchflutungskurve in Bild 10 zeigt die sehr gute Annäherung der Eckpunkte des Polygons an die kontinuierliche Kurve der Grundfelder. Die Wicklung weist eine sehr hohe Selektivität für die Grundfelder auf und sorgt für eine wirkungsvolle Kopplung der beiden Grundfelder  $p_1$  und  $p_2$ .

Weitere Beispiele für Wicklungen für Kaskadenmaschinen und die zugehörigen Durchflutungspolygone sind in [5] ausführlich dargestellt. Es finden jeweils das Durchflutungspolygon der Wicklung und die kontinuierliche Kurve der beiden Grundfelder der KSM.

#### 4.4 Spannungsgleichung, wirksame Selbstinduktivität und Felddämpfungsfaktor

Der Felddämpfungsfaktor beschreibt die Rückwirkung des Rotors auf ein vom Stator erregtes Feld. Zu seiner Bestimmung wird zunächst der Vektor des Rotorstromes in der Statorspannungsgleichung (43) mit Hilfe der

Gleichung (45) ersetzt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Sv} = & R_S \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{\sigma Sv} \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{Sv} \underline{I}_{Sv} \\ & - j\omega_{Sv} \underline{M}_{RSv Sk} \underline{I}_{Sv}^* \underline{W} \\ & \cdot \left( \underline{R}_{R \text{ masche}} + j\omega_R \underline{L}_{\sigma R \text{ masche}} \right. \\ & \left. + j\omega_R \underline{W}^T \underline{T} \text{diag}(\underline{L}_{R Sk}) \underline{T}^* \underline{W} \right)^{-1} \\ & \cdot j\omega_R \cdot \underline{W}^T \underline{T}_{Sv} \underline{M}_{RSv Sk} \cdot \underline{I}_{Sv} \end{aligned} \quad (54)$$

Die Gleichung lässt sich auch in der Form

$$\underline{U}_{Sv} = R_S \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} L_{\sigma Sv} \underline{I}_{Sv} + j\omega_{Sv} \underline{M}_{SSv} \underline{I}_{Sv} \quad (55)$$

schreiben. Dabei beschreibt die Induktivität  $\underline{M}_{SSv}$  das Zusammenwirken von Statorwicklung und Rotorwicklung und errechnet sich zu

$$\begin{aligned} \underline{M}_{SSv} = & L_{Sv} \\ & - j\omega_R \underline{M}_{RSv Sk} \underline{V}_{Sv} \\ & \cdot \left( \underline{R}_{R \text{ masche}} + j\omega_R \underline{L}_{\sigma R \text{ masche}} \right. \\ & \left. + j\omega_R \underline{V}^* \text{diag}(\underline{L}_{R Sk}) \underline{V} \right)^{-1} \\ & \cdot \underline{V}_{Sv}^* \underline{M}_{RSv Sk} \end{aligned} \quad (56)$$

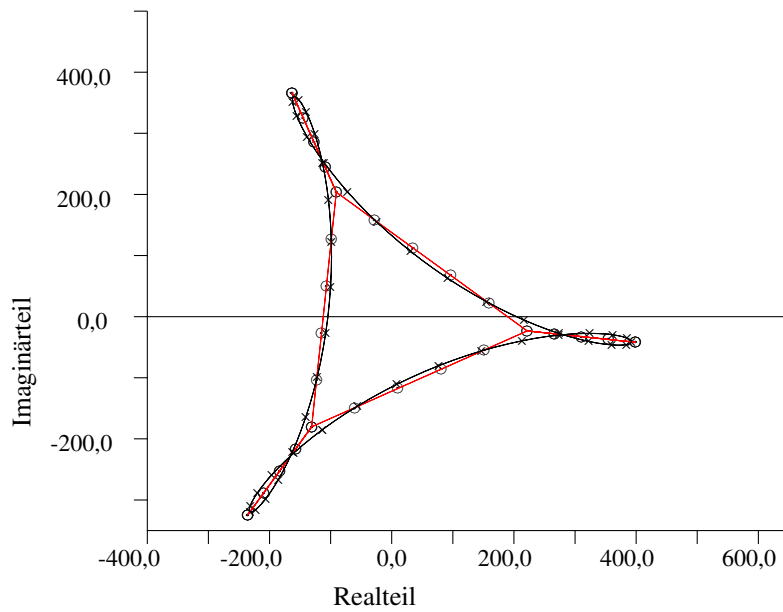
In dieser Gleichung ergeben sich die Abkürzungen  $\underline{V}$  und  $\underline{V}_{Sv}$  zu

$$\underline{V} = \underline{T}^* \cdot \underline{W} \quad (57)$$

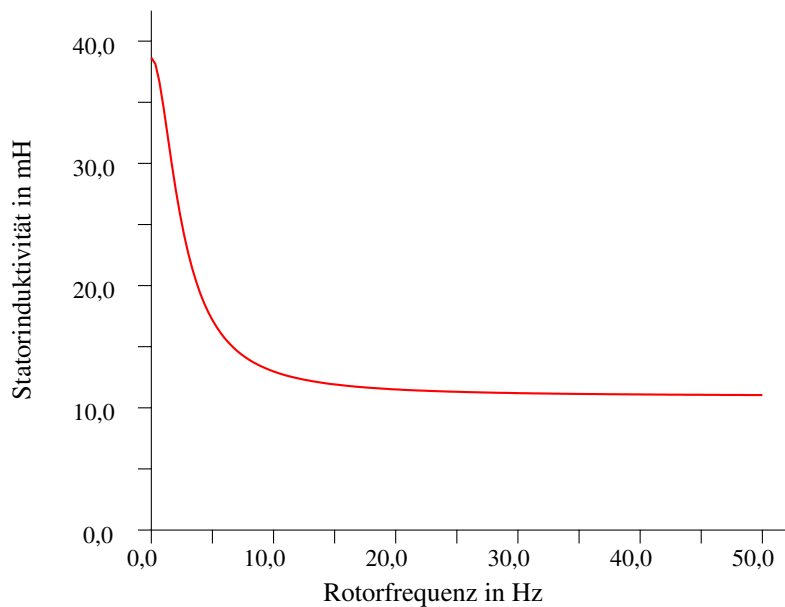
$$\underline{V}_{Sv} = \underline{T}_{Sv}^* \cdot \underline{W} \quad (58)$$

Wegen des Rotorwiderstandes kann der Wert der Induktivität  $\underline{M}_{SSv}$  komplex werden.

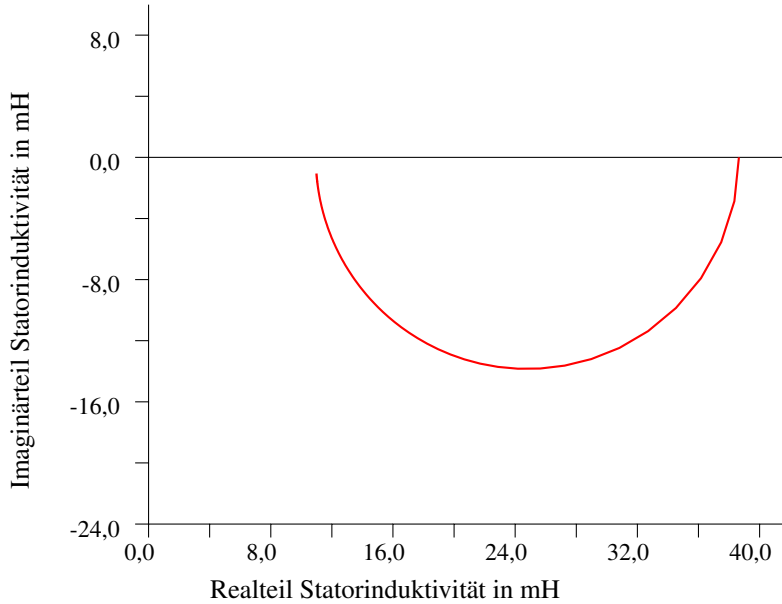
Bei realen Anordnungen ist der Wert für Frequenzen ab einigen 10 Hz jedoch nahezu reell und von der Frequenz und von den genauen Werten der Rotormaschenwiderstände praktisch unabhängig. Bild 11 zeigt die Abhängigkeit der Induktivität  $\underline{M}_{SSv}$  von der Rotorfrequenz  $f_R$  für die in [5] beschriebene



**Abbildung 10** Durchflutungskurve zur Wicklung nach Bild 9 mit  $p_1 = 2$  und  $p_2 = -4$ . Im Durchflutungspolygon ist die Lage der Nuten durch  $\odot$ , in der Durchflutungskurve durch  $\times$  gekennzeichnet. [5]



**Abbildung 11** Abhängigkeit der wirksamen Induktivität  $\underline{M}_{SSp_1}$  von der Rotorfrequenz für die Kaskadenmaschine mit der Wicklung nach Bild 9 [5]



**Abbildung 12** Ortskurve der Induktivität  $\underline{M}_{SS p_1}$  in Abhängigkeit von der Rotorfrequenz  $f_R = 0 \dots 50$  Hz für die Kaskadenmaschine mit der Wicklung nach Bild 9 [5]

Kaskadenmaschine. In Bild 12 ist die Ortskurve der Induktivität für den gleichen Frequenzbereich zu sehen.

Wird der Rotorwiderstand vernachlässigt, erhält man für die Induktivität einen reellen Wert:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{Ssv} &= \\ M_{Ssv} &= L_{Sv} - M_{RSv Sk} \underline{V}_{Sv} \left( \underline{L}_{\sigma R \text{ masche}} \right. \\ &\quad \left. + \underline{V}^* \text{diag}(\underline{L}_{R Sk}) \underline{V} \right)^{-1} \cdot \underline{V}_{Sv}^* M_{RSv Sk} \quad (59) \end{aligned}$$

In Gl. (55) ersetzt die Induktivität  $\underline{M}_{Ssv}$  die Statorhauptinduktivität  $L_{Sv}$ . Man kann die Induktivität als resultierend wirksame Hauptinduktivität der Anordnung auffassen.

Der Felddämpfungsfaktor  $\underline{D}_v$  ergibt sich aus dem Verhältnis der für den Strom  $\underline{I}_{Sv}$  wirksamen Induktivitäten mit und ohne Rückwirkung der Rotorwicklung:

$$\underline{D}_v = \frac{M_{Ssv}}{L_{Sv}} \quad (60)$$

Bei Vernachlässigung der Rotorwiderstände wird der Felddämpfungsfaktor reell:

$$\underline{D}_v = D_v \quad (61)$$

## 5 Erweiterung der Spannungsgleichungen auf mehrere Drehfelder

Bis jetzt wurde nur ein einziger Statorstrombelag betrachtet. Die Wirkung der Kaskadenmaschine beruht aber gerade darauf, dass zwei Statorgrundstrombeläge mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  gemeinsam in der Maschine vorhanden sind und zusammen in der Rotorwicklung induzieren.

Die vorhergehende Rechnung kann genauso für mehrere Strombeläge durchgeführt werden, wobei die zugehörigen Statorströme, -spannungen und -kreisfrequenzen in Vektoren  $\underline{I}_S$ ,  $\underline{U}_S$  und  $\omega_S$  geschrieben werden können. Hier wird zunächst der allgemeine Fall mit den Polpaarzahlen  $v_1, v_2 \dots$  betrachtet:

$$\underline{I}_S = \begin{pmatrix} I_{Sv_1} \\ I_{Sv_2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_S = \begin{pmatrix} U_{Sv_1} \\ U_{Sv_2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \omega_S = \begin{pmatrix} \omega_{Sv_1} \\ \omega_{Sv_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (62)$$

Die vorangegangene Rechnung, die auf Spannungsgleichung (55) führte, kann für das komplexe Gleichungssystem mit den Vektoren  $\underline{I}_S$  und  $\underline{U}_S$  in entsprechender Weise durchgeführt werden. Dabei ist zu beachten, dass innerhalb einer Spannungsgleichung nur eine Frequenz vorkommen darf. Alle Statorströme, die in diesem Gleichungssystem vorkommen, müssen also im Rotor mit der gleichen Frequenz  $\omega_R$  induzieren. Für den Vektor  $\omega_S$  gilt daher bei der mechanischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\text{mech}}$ :

$$\omega_S = \begin{pmatrix} \omega_R + v_1 \cdot \omega_{\text{mech}} \\ \omega_R + v_2 \cdot \omega_{\text{mech}} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (63)$$

Man erhält ein der Gl. (55) entsprechendes Gleichungssystem:

$$\underline{U}_S = \text{diag}(\underline{R}_S) \underline{I}_S + \text{diag}(j\omega_S) \text{diag}(\underline{L}_{\sigma S}) \underline{I}_S + \text{diag}(j\omega_S) \underline{M}_{SS} \underline{I}_S \quad (64)$$

Der Statorspannungsvektor  $\underline{U}_S$  beschreibt die Spannungen für die einzelnen Polpaarzahlen  $v$ . Dies können sowohl Spannungen in verschiedenen Wicklungen als auch Spannungen in der gleichen Wicklung sein, z.B. wenn

die Oberfelder der Statorwicklung zu Kopplungen mit der Rotorwicklung führen.

Die Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  ergibt sich bei Vernachlässigung der Rotorwiderstände zu:

$$\underline{M}_{SS} = \text{diag}(\underline{L}_S) - \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \underline{V}_S \left( \underline{L}_{\sigma R \text{ masche}} + \underline{V}^* \text{diag}(\underline{L}_{R Sk}) \underline{V} \right)^{-1} \cdot \underline{V}_S^* \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \quad (65)$$

Sie wird formal wie die Gegeninduktivität  $\underline{M}_{Ssv}$  nach Gl. (59) berechnet.

An die Stelle des Widerstandes der Statorinduktivität und der Gegeninduktivitäten zwischen Stator und Rotor treten jedoch folgende Diagonalmatrizen:

$$\text{diag}(\underline{R}_S) = \begin{pmatrix} R_{S v_1} & & & \\ & R_{S v_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\text{diag}(\underline{L}_S) = \begin{pmatrix} L_{S v_1} & & & \\ & L_{S v_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\text{diag}(\underline{M}_{RS}) = \begin{pmatrix} M_{RS v_1 Sk} & & & \\ & M_{RS v_2 Sk} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (68)$$

Sie haben für jede Polpaarzahl  $v$  der Statorströme eine Zeile und Spalte.

Der in Gl. (59) vorhandene Vektor  $\underline{V}_{Sv}$  wird nun durch die Matrix

$$\underline{V}_S = \underline{T}_S^* \cdot \underline{W} \quad (69)$$

$$\text{mit } \underline{T}_S = \frac{1}{\sqrt{N_R}} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \\ \underline{T}_{v_1 n} & \underline{T}_{v_2 n} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \quad (70)$$

$$\text{und } \underline{T}_{vn} = e^{-j \frac{2\pi}{N_R} vn} \quad (71)$$

mit einer Spalte je Polpaarzahl  $v$  und einer Zeile je Symmetrischer Komponente des Rotors ersetzt.

Sind die Rotorwiderstände nicht zu vernachlässigen, so berechnet sich die Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  zu

$$\begin{aligned} \underline{M}_{SS} &= \text{diag}(\underline{L}_S) \\ &\quad - j\omega_R \cdot \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \underline{V}_S \left( \underline{R}_{R \text{ masche}} \right. \\ &\quad \quad \left. + j\omega_R \underline{L}_{\sigma R \text{ masche}} \right. \\ &\quad \quad \left. + j\omega_R \underline{V}^* \text{diag}(\underline{L}_{R Sk}) \underline{V} \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \underline{V}_S^* \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \quad . \end{aligned} \quad (72)$$

Auf der Hauptdiagonalen der Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  finden sich die Induktivitäten  $\underline{M}_{Ssv}$  nach Gl. (56) bzw. (59), die ein Maß für die Rückwirkung der Rotorwicklung auf ein Feld der Polpaarzahl  $v$  darstellen. Auf den übrigen Plätzen stehen Gegeninduktivitäten  $\underline{M}_{SSv_1 v_2}$ , die

die Kopplung zwischen verschiedenen Statorströmen  $v_1$  und  $v_2$  durch die Rotorwicklung kennzeichnen:

$$\underline{M}_{SS} = \begin{pmatrix} \underline{M}_{SSv_1} & \underline{M}_{SSv_1 v_2} & \cdots \\ \underline{M}_{SSv_2 v_1} & \underline{M}_{SSv_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (73)$$

Dabei gilt  $\underline{M}_{SSv_2 v_1} = \underline{M}_{SSv_1 v_2}^*$  bei vernachlässigbaren Rotorwiderständen.

Gehören die verschiedenen Statorströme zu verschiedenen Statorwicklungen, so werden die Wicklungen durch die Gegeninduktivitäten  $\underline{M}_{SSv_1 v_2}$  elektromagnetisch miteinander verkoppelt. Durch die mechanische Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\text{mech}}$  des Rotors können dabei auch Kopplungen zwischen Strömen und Spannungen unterschiedlicher Frequenz vorkommen.

## 6 Spannungsgleichungen für die KSM mit zwei Drehfeldern

Für das Betriebsverhalten der Kaskadenmaschine sind die Kopplungen mit den beiden Grundfeldern mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  relevant. Zu den beiden Magnetfeldern gehören die Spannungen  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_2$  sowie die Ströme  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$  der Statorwicklungen bzw. Statorwicklungsteile entsprechend Abb. 1.

Die Frequenz der Spannungen und Ströme in der Wicklung mit der Polpaarzahl  $p_1$  ist  $f_1$ . Die Kreisfrequenz ist entsprechend  $\omega_1 = 2\pi f_1$ .

In der Wicklung mit der Polpaarzahl  $p_2$  werden Spannungen mit der Frequenz  $f_2$  nach Gl. (6) induziert. Die Frequenz und die Kreisfrequenz sowie die Drehzahl lassen sich auch, wie bei Induktionsmaschinen üblich, mit dem Schlupf  $s$  und der Synchrondrehzahl  $n_0$  ausdrücken:

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad , \quad \omega_2 = s \cdot \omega_1 \quad (74)$$

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0} \quad (75)$$

$$n = (1 - s) \cdot n_0 \quad , \quad n_0 = \frac{f_1}{p} = \frac{f_1}{p_1 - p_2} \quad (76)$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich die Frequenzen und die Drehzahl wie bei Induktionsmaschinen darstellen. Die Spannungsgleichungen lassen sich damit übersichtlich in einer Form darstellen, die der Schreibweise für Induktionsmaschinen entspricht.

### 6.1 Matrizenschreibweise

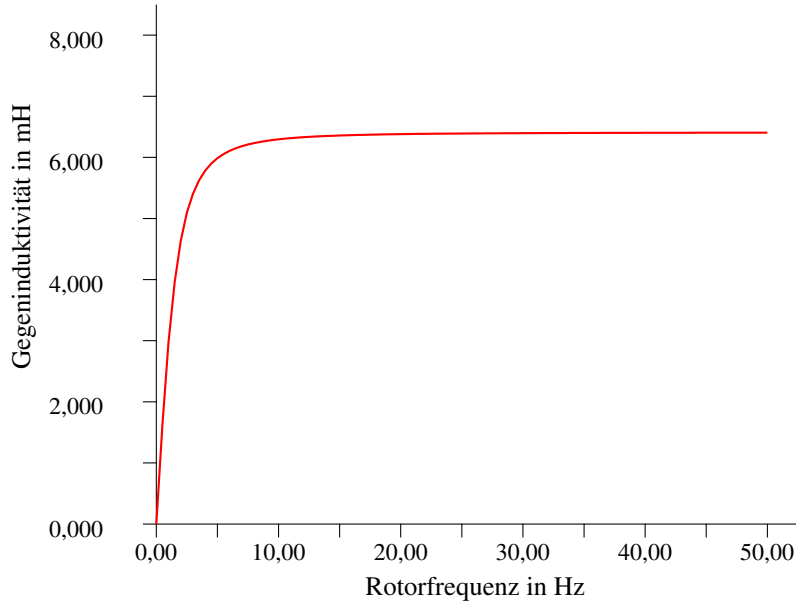
Bei Betrachtung der Strombeläge der beiden Statorwicklungen mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  ergibt die Rechnung eine  $2 \times 2$  Induktivitätsmatrix:

$$\underline{M}_{SS} = \begin{pmatrix} \underline{M}_{SS p_1} & \underline{M}_{SS p_1 p_2} \\ \underline{M}_{SS p_2 p_1} & \underline{M}_{SS p_2} \end{pmatrix} \quad (77)$$

Die Widerstände, Streuinduktivitäten und Kreisfrequenzen lassen sich ebenfalls als  $2 \times 2$  Matrizen darstellen:

$$\underline{R}_S = \begin{pmatrix} R_{S1} & 0 \\ 0 & R_{S2} \end{pmatrix} \quad (78)$$





**Abbildung 13** Abhängigkeit der Gegeninduktivität  $\underline{M}_{SSp_1p_2}$  von der Rotorfrequenz für die Kaskadenmaschine mit der Wicklung nach Bild 9 [5]

$$\underline{L}_{\sigma S} = \begin{pmatrix} L_{\sigma S1} & 0 \\ 0 & L_{\sigma S2} \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & s\omega_1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Die Statorspannungsgleichungen nehmen dann folgende Formen an:

$$\underline{U}_S = \underline{R}_S \cdot \underline{I}_S + j\underline{\omega} (\underline{L}_{\sigma S} + \underline{M}_{SS}) \cdot \underline{I}_S \quad (81)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{S1} & 0 \\ 0 & R_{S2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & s\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{M}_{SSp_1} & \underline{M}_{SSp_1p_2} \\ \underline{M}_{SSp_2p_1} & \underline{M}_{SSp_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & s\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma S1} & 0 \\ 0 & L_{\sigma S2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Die Gleichung enthält die ohmschen Spannungsabfälle  $\underline{R}_S \cdot \underline{I}_S$ , die Spannungsabfälle entlang der Streuinduktivitäten  $j\underline{\omega} \cdot \underline{L}_{\sigma S} \cdot \underline{I}_S$  und die induzierte Hauptfeldspannungen  $\underline{U}_{hS}$  der Luftspaltfelder der KSM:

$$\underline{U}_{hS} = \begin{pmatrix} U_{h1} \\ U_{h2} \end{pmatrix} = j\underline{\omega} \cdot \underline{M}_{SS} \cdot \underline{I}_S \quad (83)$$

## 6.2 Gleichungen entsprechend der Darstellung für Induktionsmaschinen mit SchleifringRotor

In ausgeschriebener Form erhält man die folgenden Spannungsgleichungen für die beiden Statorwicklungen:

$$\underline{U}_1 = R_{S1} \cdot \underline{I}_1 + j\omega_1 \cdot (L_{\sigma S1} + \underline{M}_{SSp_1}) \cdot \underline{I}_1 + j\omega_1 \cdot \underline{M}_{SSp_1p_2} \cdot \underline{I}_2 \quad (84)$$

$$\underline{U}_2 = R_{S2} \cdot \underline{I}_2 + js\omega_1 \cdot (L_{\sigma S2} + \underline{M}_{SSp_2}) \cdot \underline{I}_2 + js\omega_1 \cdot \underline{M}_{SSp_2p_1} \cdot \underline{I}_1 \quad (85)$$

Diese **Spannungsgleichungen entsprechen** für reelle  $\underline{M}_{SS} = M_{SS}$  den **Gleichungen einer normalen Drehstrominduktionsmaschine mit SchleifringRotor**. Die Bilder 11 und 12 zeigen den Verlauf der Selbstinduktivität. In Bild 13 ist die Abhängigkeit der Gegeninduktivität von der Rotorfrequenz zu sehen. Da für Rotorfrequenzen ab einigen 10 Hz die Koeffizienten praktisch nicht mehr von der Frequenz abhängen, besitzt die Kaskadenmaschine für diesen Bereich das Verhalten einer Induktionsmaschine mit SchleifringRotor.

## 7 Berücksichtigung der Eisenverluste

Die Eisenverluste können für ein Feld der Polpaarzahl  $v$  durch einen Eisenverlustwiderstand  $R_{Svfe}$  berücksichtigt werden. Mit folgenden Überlegungen können die Eisenverlustwiderstände in einer resultierenden Induktivitätsmatrix berücksichtigt werden.

Die Hauptfeldspannungen führen mit den Eisenverlustwiderständen  $R_{Svfe}$  zu den Strömen zur Erfassung der Eisenverluste:

$$I_{feSv} = \frac{U_{hv}}{R_{Svfe}} \quad (86)$$

Der gesamte Strom ergibt sich aus der Summe des Eisenverluststroms  $I_{feSv}$  mit dem Strom  $I_{Sv}$ . In Matrixschreibweise lautet der Zusammenhang:

$$\underline{I}_{gesS} = \underline{I}_S + \underline{I}_{feS} \quad (87)$$

$$\underline{I}_{gesS} = \underline{I}_S + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{Sv_1fe}} & & \\ & \frac{1}{R_{Sv_2fe}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \underline{U}_{hS} \quad (88)$$

Der Strom  $\underline{I}_S$  kann durch Umstellen der Gleichung (83) durch die Hauptfeldspannung  $\underline{U}_{hS}$  ausgedrückt werden:

$$\underline{I}_{gesS} = (\underline{j\omega} \cdot \underline{M}_{SS})^{-1} \cdot \underline{U}_{hS} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{Sv_1fe}} & & \\ & \frac{1}{R_{Sv_1fe}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \underline{U}_{hS} \quad (89)$$

Diese Gleichung kann nun nach  $\underline{U}_{hS}$  umgestellt werden, so dass wieder ein Zusammenhang zwischen Hauptfeldspannung und Gesamtstrom entsprechend Gl. (83) entsteht:

$$\underline{U}_{hS} = \underline{j\omega} \cdot \underline{M}_{SSfe} \cdot \underline{I}_{gesS} \quad (90)$$

Die Matrix  $\underline{M}_{SSfe}$  enthält nun mit ihren komplexen Elementen die Wicklungswiderstände der Rotorwicklung und die Eisenverlustwiderstände. Sie berechnet sich aus der Matrix  $\underline{M}_{SS}$  und den Eisenverlustwiderständen:

$$\underline{M}_{SSfe} = \left( \underline{M}_{SS}^{-1} + \underline{\omega} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{Sv_1fe}} & & \\ & \frac{1}{R_{Sv_1fe}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \right)^{-1} \quad (91)$$

$$= (\underline{M}_{SS}^{-1} + \underline{G}_{Sfe})^{-1} \quad (92)$$

Darin enthält die Diagonalmatrix  $\underline{G}_{Sfe}$  die Eisenverlustwiderstände und Kreisfrequenzen:

$$\underline{G}_{Sfe} = \begin{pmatrix} \frac{j\omega_{v_1}}{R_{Sv_1fe}} & & \\ & \frac{j\omega_{v_2}}{R_{Sv_2fe}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (93)$$

Bei Betrachtung der beiden Grundfelder ergeben die beiden zugehörigen Eisenverlustwiderstände  $R_{S1fe}$  für das Feld der Polpaarzahl  $p_1$  und  $R_{S2fe}$  für das Feld der Polpaarzahl  $p_2$  folgende Hilfsgrößen:

$$G_{S1fe} = \frac{j\omega_1}{R_{S1fe}} \quad (94)$$

$$G_{S2fe} = \frac{js\omega_1}{R_{S2fe}} \quad (95)$$

Damit ergibt sich die Induktivitätsmatrix zu

$$\underline{M}_{SSfe} = \left( \begin{pmatrix} G_{S1fe} & 0 \\ 0 & G_{S2fe} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{M}_{SSp_1} & \underline{M}_{SSp_1p_2} \\ \underline{M}_{SSp_2p_1} & \underline{M}_{SSp_2} \end{pmatrix}^{-1} \right)^{-1} \quad (96)$$

Die Statorspannungsgleichung (82) erhält bei Berücksichtigung der Eisenverluste folgendes Aussehen:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{S1} & 0 \\ 0 & R_{S2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j\omega_1 & 0 \\ 0 & js\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma s1} & 0 \\ 0 & L_{\sigma s2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j\omega_1 & 0 \\ 0 & js\omega_1 \end{pmatrix} \cdot \underline{M}_{SSfe} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Die zur Berechnung des Luftspaltmomentes und der Rotorstromwärmeverluste notwendigen Ströme  $\underline{I}_{S1}$  und  $\underline{I}_{S2}$  lassen sich aus den Strömen  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$  gewinnen. Dazu wird der Flussverkettungsvektor aus den Statorströmen  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$  mit der Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  berechnet:

$$\underline{\Psi}_S = \underline{M}_{SSfe} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (98)$$

Die Stöme  $\underline{I}_{S1}$  und  $\underline{I}_{S2}$  müssen mit der ursprünglichen Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  auf die gleichen Flussverkettungen führen, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_{S1} \\ \underline{I}_{S2} \end{pmatrix} = \underline{M}_{SS}^{-1} \cdot \underline{\Psi}_S \quad (99)$$

## 8 Verallgemeinerung der Analyse auf eine mehrlagige Rotorwicklung

Bei einer einlagigen Rotorwicklung ergibt sich die Induktivitätsmatrix nach Gleichung (72) aus der Zuordnung der Maschenströme zu den Nutdurchflutungen, wobei die Zuordnung durch die Matrix  $\underline{W}$  erfolgt. Die Nutstreuinduktivität ist dabei für alle Leiter identisch.

Betrachtet man eine mehrlagige Wicklung, so sind die Nutstreuinduktivitäten für die Leiter der verschiedenen Wicklungslagen unterschiedlich. Ferner gibt es Gegeninduktivitäten zwischen den Leitern einer Nut in verschiedenen Wicklungslagen.

Daher ist es zweckmässig, die Zuordnung der Maschenströme zu den Nutdurchflutungen der einzelnen Wicklungslagen zu betrachten.

Dazu müssen die Matrizen  $\underline{W}$  und  $\underline{W}^T$  sowie  $\text{diag}(\underline{L}_{Rsk})$  so erweitert werden, dass sie den Zusammenhang zwischen den Maschenströmen und den Nutdurchflutungen der einzelnen Lagen angeben.

Gleichung (72) zur Berechnung der Induktivitätsmatrix muss so verallgemeinert werden, dass die Induktivitäten der verschiedenen Rotorlagen berücksichtigt werden können. In Gln. (54), (56) und (72) findet sich jeweils im mittleren Teil der Term, der die Rotorgrößen und die Wicklungszuordnung enthält. Diese Größen sind in folgender Matrix  $\underline{P}_{ein}$  für eine einlagige Wicklung zusammengefasst:

$$\underline{P}_{ein} = \underline{R}_{Rmasche} + j\omega_R \underline{L}_{\sigma Rmasche} + j\omega_R \underline{V}^* \text{diag}(\underline{L}_{Rsk}) \underline{V} \quad (100)$$

Die Berechnung der Maschenwiderstandsmatrix  $\underline{R}_{Rmasche}$  und der Maschenstreuinduktivitätsmatrix  $\underline{L}_{\sigma Rmasche}$  hängt nicht davon ab, wie die Leiter in den Nuten verteilt sind. Es muss nur bekannt sein, welche galvanischen Verbindungen zwischen den Leitern bestehen.

Von der Verteilung auf die Wicklungslagen ist nur der letzte Teil der Gleichung betroffen. Die Elemente werden in folgender Matrix  $\underline{Q}_{ein}$  zusammengefasst. Sie ergibt sich mit der Matrix  $\underline{V}$  nach Gl. (57) für eine Lage zu:

$$\underline{Q}_{ein} = \underline{V}^* \text{diag}(\underline{L}_{Rsk}) \underline{V} \quad (101)$$

Damit gilt für die Matrix  $\underline{P}_{\text{ein}}$  für eine einlagige Wicklung:

$$\underline{P}_{\text{ein}} = \underline{R}_{\text{R masche}} + j\omega_{\text{R}} \underline{L}_{\sigma \text{R masche}} + j\omega_{\text{R}} \underline{Q}_{\text{ein}} \quad (102)$$

Die Erweiterung auf mehrere Rotorlagen ist durch den Übergang von einfachen Matrizen auf Blockmatrizen möglich. Bei Blockmatrizen besteht jedes Element aus einer Matrix. Besteht die Wicklung aus  $L$  Lagen, so erhält man statt der Induktivitätsmatrix  $\text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l})$  eine Blockmatrix mit  $L$  Zeilen und Spalten der Form

$$\begin{pmatrix} \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_1}) & \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_1 l_2}) & \cdots \\ \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_2 l_1}) & \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_2}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (103)$$

mit den Matrizen der Selbstinduktivitäten der einzelnen Wicklungslagen  $l$

$$\text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l}) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & L_{nl} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (104)$$

und den Matrizen der Gegeninduktivitäten zwischen zwei Wicklungslagen  $l_1$  und  $l_2$

$$\text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_1 l_2}) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & L_{nl_1 l_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Die Matrix  $\underline{W}$  wird dann zu einem Blockvektor  $\underline{W}_{\text{mehr}}$  der Form

$$\underline{W}_{\text{mehr}} = \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Der Blockvektor gibt die Zuordnung der Maschenströme zu den Strömen in den Wicklungslagen der Nuten an. Die Matrix  $\underline{W}^T$  wird entsprechend ersetzt.

Die Matrix  $\underline{Q}$  erhält dann folgendes Aussehen:

$$\underline{Q}_{\text{mehr}} = \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{T} & & \\ & \underline{T} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_1}) & \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_1 l_2}) & \cdots \\ \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_2 l_1}) & \text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l_2}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{T}^* & & \\ & \underline{T}^* & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (107)$$

Auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\text{diag}(\underline{L}_{\text{R Sk } l})$  stehen dann die Selbstinduktivitäten für die Symmetrischen Komponenten der einzelnen Wicklungslagen mit den Nummern  $l$ , die sich aus Luftspaltinduktivität, Nutstreuinduktivität und Stirnstreuinduktivität zusammensetzen:

$$L_{nl} = L_{hnl} + L_{\sigma \text{nut } nl} + L_{\sigma \text{Stirn } nl} \quad , \quad l = 1, 2, 3 \dots L \quad (108)$$

Die Luftspaltinduktivität ist natürlich für alle Lagen identisch:

$$L_{hnl} = L_{hn} \quad \text{für alle } l \quad (109)$$

Genauso verhält es sich hier bei der vereinfachten Betrachtung des Stirnstreufeldes, bei der eine Zerlegung des Wickelkopfes in verschiedene Etagen nicht vorgenommen wird:

$$L_{\sigma \text{Stirn } nl} = L_{\sigma \text{Stirn } n} \quad \text{für alle } l \quad (110)$$

Die Berechnung der Nutstreuinduktivität muss natürlich für jede Lage mit dem zugehörigen Nutstreuleitwert erfolgen. Es besteht aber keine Abhängigkeit der Nutstreuinduktivität von der Ordnungszahl  $n$  der Symmetrischen Komponenten:

$$L_{\sigma \text{nut } nl} = L_{\sigma \text{nut } l} \quad \text{für alle } n \quad (111)$$

Auf der Hauptdiagonalen der Matrizen  $\text{diag}(\underline{L}_{\text{r sk } l_1 l_2})$  finden sich die Gegeninduktivitäten zwischen den Wicklungslagen. Zur Gegeninduktivität zwischen zwei Lagen tragen alle Felder bei, die den beiden Symmetrischen Komponenten gemeinsam sind.

Dies sind das Luftspaltfeld, das Stirnraumfeld und das gemeinsame Nutquerfeld. Bei der vereinfachten Betrachtung des Stirnfeldes ist dieses vollständig mit allen Wicklungslagen verkettet. Für die Gegeninduktivität zwischen den Lagen  $l_1$  und  $l_2$  erhält man:

$$L_{nl_1 l_2} = L_{hn} + L_{\sigma \text{nut } l_1 l_2} + L_{\sigma \text{Stirn } n} \quad (112)$$

Man erkennt, dass sich die Gegeninduktivitäten aus solchen Anteilen zusammensetzen, die von der Nutlage abhängen, und solchen, die von der Ordnungszahl der Symmetrischen Komponente abhängig sind. Beide Abhängigkeiten treten nicht gleichzeitig auf.

Daher lässt sich die Matrix  $\underline{Q}_{\text{mehr}}$  in einen von der Nutlage und einen von der Ordnungszahl der Symmetrischen Komponente abhängigen Anteil zerlegen:

$$\underline{Q}_{\text{mehr}} = \underline{Q}_{\text{mehr}l} + \underline{Q}_{\text{mehr}n} \quad (113)$$

Dabei enthält  $\underline{Q}_{\text{mehr}l}$  nur die von der Nutlage abhängigen Anteile, wohingegen  $\underline{Q}_{\text{mehr}n}$  nur die von der Ordnungszahl abhängigen Teile berücksichtigt:

$$\underline{Q}_{\text{mehr}l} = \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{T} & & \\ & \underline{T} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut } l_1} \\ \vdots \end{pmatrix} & \text{diag} \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut } l_1 l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} & \cdots \\ \text{diag} \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut } l_2 l_1} \\ \vdots \end{pmatrix} & \text{diag} \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut } l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{T}^* & & \\ & \underline{T}^* & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (114)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{mehrn}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}} & & \\ & \underline{\mathbf{T}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \\ L_{an} \end{pmatrix} & \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \\ L_{an} \end{pmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & & \\ & \underline{\mathbf{T}}^* & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (115) \\
&\text{mit } L_{an} = L_{hn} + L_{\sigma \text{Stirn}}
\end{aligned}$$

Beide Matrizen  $\mathbf{Q}_{\text{mehrl}}$  und  $\mathbf{Q}_{\text{mehrn}}$  lassen sich deutlich vereinfachen.

Zunächst soll die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{mehrl}}$  mit den nur von der Wicklungslage bestimmten Induktivitäten betrachtet werden.

Die Diagonalmatrizen enthalten jeweils identische Elemente auf den Hauptdiagonalen, so dass sie als Produkt aus Induktivität und Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{mehrl}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}} & & \\ & \underline{\mathbf{T}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut}l_1} \cdot \mathbf{E} & L_{\sigma \text{nut}l_1l_2} \cdot \mathbf{E} & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut}l_2l_1} \cdot \mathbf{E} & L_{\sigma \text{nut}l_2} \cdot \mathbf{E} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & & \\ & \underline{\mathbf{T}}^* & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (116)
\end{aligned}$$

Die Transformationsblockmatrix mit den Teilmatrizen  $\underline{\mathbf{T}}^*$  wird von rechts mit der Induktivitätsblockmatrix multipliziert, wobei in Produkten stehende Einheitsmatrizen weggelassen werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{mehrl}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}} & & \\ & \underline{\mathbf{T}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut}l_1} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & L_{\sigma \text{nut}l_1l_2} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut}l_2l_1} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & L_{\sigma \text{nut}l_2} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (117)
\end{aligned}$$

Genauso kann die Multiplikation von links mit den

Teilmatrizen  $\underline{\mathbf{T}}$  ausgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{mehrl}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \\
&\cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut}l_1} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & L_{\sigma \text{nut}l_1l_2} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut}l_2l_1} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & L_{\sigma \text{nut}l_2} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (118)
\end{aligned}$$

Nun gibt das Produkt der Transformationsmatrizen  $\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* = \mathbf{E}$  die Einheitsmatrix, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{mehrl}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \\
&\cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut}l_1} \cdot \mathbf{E} & L_{\sigma \text{nut}l_1l_2} \cdot \mathbf{E} & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut}l_2l_1} \cdot \mathbf{E} & L_{\sigma \text{nut}l_2} \cdot \mathbf{E} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (119)
\end{aligned}$$

Interpretiert man das Produkt aus einer Matrix und einer Blockmatrix so, dass die Ergebnisblockmatrix aus Produkten der Elemente der Matrix und Matrizen der Blockmatrix besteht

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \mathbf{C}_{ik} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & \mathbf{B}_{jk} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad (120)$$

mit

$$\mathbf{C}_{ik} = \sum_j a_{ij} \cdot \mathbf{B}_{jk} \quad , \quad (121)$$

so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\text{mehrl}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \\
&\cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut}l_1} & L_{\sigma \text{nut}l_1l_2} & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut}l_2l_1} & L_{\sigma \text{nut}l_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} & & \\ & \mathbf{E} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (122)
\end{aligned}$$



$$\mathbf{Q}_{\text{mehr1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut} l_1} & L_{\sigma \text{nut} l_1 l_2} & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut} l_2 l_1} & L_{\sigma \text{nut} l_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (123)$$

Letztlich erhält man:

$$\mathbf{Q}_{\text{mehr1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T L_{\sigma \text{nut}} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (124)$$

mit

$$L_{\sigma \text{nut}} = \begin{pmatrix} L_{\sigma \text{nut} l_1} & L_{\sigma \text{nut} l_1 l_2} & \cdots \\ L_{\sigma \text{nut} l_2 l_1} & L_{\sigma \text{nut} l_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (125)$$

Nun soll die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{mehr1}}$  vereinfacht werden. Dazu wird die Multiplikation von rechts mit der Transformationsblockmatrix mit den Teilmatrizen  $\underline{\mathbf{T}}^*$  ausgeschrieben:

$$\mathbf{Q}_{\text{mehr1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}} & & \\ & \underline{\mathbf{T}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (126)$$

mit  $L_{an} = L_{hn} + L_{\sigma \text{Stirn}}$

Entsprechend wird die Multiplikation von links mit den

Teilmatrizen  $\underline{\mathbf{T}}$  vorgenommen:

$$\mathbf{Q}_{\text{mehr1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (127)$$

mit  $L_{an} = L_{hn} + L_{\sigma \text{Stirn}}$

Schreibt man das rechte Produkt aus, so gewinnt man den folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{Q}_{\text{mehr1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* \cdot \mathbf{W} \\ \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} L_{an} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{T}}^* \cdot \mathbf{W} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (128)$$

mit

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{l_1} + \mathbf{W}_{l_2} + \dots \quad (129)$$

$L_{an} = L_{hn} + L_{\sigma \text{Stirn}}$

Die Ausführung der letzten Multiplikation führt schließlich auf

$$\mathbf{Q}_{\text{mehr1}} = \mathbf{W}^T \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag}(L_{rskn}) \cdot \underline{\mathbf{T}}^* \cdot \mathbf{W} \quad (130)$$

mit

$$L_{rskn} = \begin{pmatrix} L_{hn} + L_{\sigma \text{Stirn}} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (131)$$

Dieser Ausdruck für die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{mehr1}}$  unterscheidet sich nicht von der Gleichung für eine einlagige Wicklung, was ja auch nicht verwundert, da die Wicklungslage für die hier betrachteten Induktivitäten ohne Bedeutung ist.

Mit den letzten beiden Ausdrücken (Gleichungen (124) und (130)) kann nun die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{mehr}}$  angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{mehr}} &= \mathbf{Q}_{\text{mehr1}} + \mathbf{Q}_{\text{mehr1}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T L_{\sigma \text{nut}} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{l_1} \\ \mathbf{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &\quad + \mathbf{W}^T \underline{\mathbf{T}} \cdot \text{diag}(L_{rskn}) \cdot \underline{\mathbf{T}}^* \cdot \mathbf{W} \quad (132) \end{aligned}$$

Nun stehen alle Beziehungen zur Berechnung der Induktivitätsmatrix  $\underline{\mathbf{M}}_{SS}$  für eine mehrlagige

Rotorwicklung zur Verfügung. Man erhält:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{SS} = & \text{diag}(\underline{L}_S) \\ & -j\omega_R \cdot \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \underline{V}_S \cdot \\ & \left( \underline{R}_{R \text{ masche}} + j\omega_R \underline{L}_{\sigma R \text{ masche}} \right. \\ & + j\omega_R \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \underline{L}_{\sigma \text{ nut}} \begin{pmatrix} \underline{W}_{l_1} \\ \underline{W}_{l_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ & \left. + j\omega_R \underline{W}^T \cdot \underline{T} \cdot \text{diag}(\underline{L}_{rskn}) \cdot \underline{T}^* \underline{W} \right)^{-1} \\ & \cdot \underline{V}_S^* \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \end{aligned} \quad (133)$$

So lässt sich das elektromagnetische Verhalten einer beliebigen kurzgeschlossenen Rotorwicklung durch eine einzige Induktivitätsmatrix für die Statorwicklungen beschreiben.

## 9 Wicklungskenngrößen für die KSM: Streuung, Induktionsverhältnis und Wicklungsfaktor

In der Rotorwicklung bildet sich ein Stromsystem aus, das unterschiedliche Magnetfelder erzeugt. Für Kaskadenmaschinen KSM ist die Erzeugung der beiden Grundfelder  $p_1$  und  $p_2$  relevant.

Im Folgenden werden Kenngrößen angegeben, die die Kopplung der beiden Felder durch die Rotorwicklung beschreiben. Dies sind

- **Gesamtstreuiziffer, Oberfeldstreuung:** gibt an, in welchem Umfang Magnetfelder erzeugt werden, die nicht zu den Luftspaltfeldern mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  gehören (Abschn. 9.1, 9.2).
- **Induktionsverhältnis:** gibt das Verhältnis der Flussdichten der Luftspaltfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  an (Abschn. 9.3).
- **Wicklungsfaktor:** ist ein Maß dafür, welcher Anteil der Gesamtdurchflutung die beiden Luftspaltfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  erzeugt (Abschn. 9.4).

Um eine Wicklung zu charakterisieren, wird ggf. nur die Wicklungstopologie betrachtet. Leiterquerschnitte und Widerstände sowie Nut- und Stirnstreifelder werden daher in diesen Fällen nicht betrachtet.

### 9.1 Gesamtstreuung

Die Induktionswirkung der Rotorwicklung für verschiedene Statorstrombeläge wird durch die Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  beschrieben.

Für die Kopplung zwischen zwei Statorstrombelägen mit den Polpaarzahlen  $v_1$  und  $v_2$  lässt sich die Ziffer

der Gesamtstreuung aus den Gegeninduktivitäten und den wirksamen Selbstinduktivitäten angeben:

$$\sigma_{v_1 v_2} = 1 - \frac{\underline{M}_{SSv_1 v_2} \cdot \underline{M}_{SSv_2 v_1}}{(\underline{L}_{\sigma Sv_1} + \underline{M}_{SSv_1}) \cdot (\underline{L}_{\sigma Sv_2} + \underline{M}_{SSv_2})} \quad (134)$$

Die Streuung ergibt sich dabei sowohl aus Flussverkettungen mit dem Nutquerfeld und dem Stirnstreifelfeld als auch aus Verkettungen aufgrund von Rotoroberfeldern und einer verminderten Flussverkettung aufgrund der Schrägung.

Wegen des Rotorwiderstandes kann man durchaus einen komplexen Wert für die Streuung erhalten.

### 9.2 Oberfeldstreuung

Die Qualität einer Wicklung wird durch ihr Oberfeldverhalten gekennzeichnet. Ein Maß für den Gehalt an Oberfeldern ist die Streuung der Wicklung allein aufgrund der induzierenden Wirkung der Oberfelder.

Zur Berechnung der Oberfeldstreuung werden bei der Berechnung der Induktivitätsmatrix  $\underline{M}_{SS}$  alle Induktivitäten und Widerstände bis auf die Luftspaltinduktivitäten außer acht gelassen:

$$\begin{aligned} \underline{M}_{SS} = & \text{diag}(\underline{L}_S) \\ & - \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \cdot \underline{V}_S \cdot (\underline{V}^* \cdot \text{diag}(\underline{L}_{rsk}) \cdot \underline{V})^{-1} \\ & \cdot \underline{V}_S^* \cdot \text{diag}(\underline{M}_{RS}) \end{aligned} \quad (135)$$

Die Ziffer der Oberfeldstreuung ergibt sich dann für die beiden Grundfelder  $p_1$  und  $p_2$  zu

$$\sigma_{ow p_1 p_2} = 1 - \frac{\underline{M}_{SSp_1 p_2} \cdot \underline{M}_{SSp_2 p_1}}{\underline{M}_{SSp_1} \cdot \underline{M}_{SSp_2}} \quad (136)$$

Die Oberfeldstreuung ist ein Maß dafür, wie groß der Anteil an Oberfeldern in der Kaskadenmaschine ist. Diese können zu Geräuschen und Schwingungen führen. Das Ziel ist also, eine Wicklung mit kleiner Oberfeldstreuung zu haben. Dies kann aber dazu führen, dass die Wicklung sehr kompliziert wird oder in den Nuten sich teilweise kompensierende Ströme hat. Es geht also darum einen guten Kompromiss für die Rotorwicklung zu finden.

### 9.3 Verhältnis der Grundfeldflussdichten

Das Verhältnis der Grundfeldinduktionen bestimmt zu einem wesentlichen Teil die Eigenschaften einer KSM. Dies ist in [14] anhand der erforderlichen Durchflutungen zur Erzeugung eines vorgegebenen Drehmoments dargestellt. Im Ergebnis gibt es optimale Flussdichteverhältnisse der Rotorwicklung, mit der das Drehmoment mit geringster Durchflutung erzeugt werden kann. Für die Bewertung einer Rotorwicklung für KSM ist also die Kenntnis des Flussdichteverhältnisses eine wichtige Größe.

Durch den Aufbau der Rotorwicklung stehen die von ihr generierten Strombelagswellen und die damit verbundenen Felderregungen in einem ganz bestimmten Verhältnis zueinander. Die Rotorwicklung zieht aber für den Fall, dass sie stromlos sein soll, auch ein ganz bestimmtes Verhältnis der Grundfeldinduktionen nach sich. Der Strom in der

Rotorwicklung versucht stets, die Grundfeldinduktionen in dieses Verhältnis zu bringen.

Wenn die Rotorwicklung zwei Statorwicklungen mit den Grundpolpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  koppelt, so erzeugt ein und dasselbe Stromsystem im Rotor Strombeläge mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$ . Wird dieses Stromsystem durch den Strom  $I$  gekennzeichnet, so ergeben sich die Strombeläge der Grundfelder ganz allgemein zu

$$A_{p_1} = K_A \cdot \xi_{p_1} \cdot I \quad (137)$$

$$A_{p_2} = K_A \cdot \xi_{p_2} \cdot I \quad (138)$$

In der Grösse  $K_A$  sind alle geometrischen Grössen und Wicklungsdaten zusammengefasst, die nicht von der Polpaarzahl abhängen. Die Wicklungsfaktoren  $\xi_{p_1}$  und  $\xi_{p_2}$  sollen die unterschiedliche Wirkung der Wicklungsverteilung für die einzelnen Polpaarzahlen erfassen.

Das Verhältnis der Strombeläge nimmt dann folgende Form an:

$$\frac{A_{p_1}}{A_{p_2}} = \frac{\xi_{p_1}}{\xi_{p_2}} \quad (139)$$

Bei der analytischen Behandlung der unsymmetrischen Wicklungen in Abschnitt 4.1 werden die Faktoren  $\xi_{p_1}$  und  $\xi_{p_2}$  implizit bei der Transformation in die Symmetrischen Komponenten der Nutdurchflutungen gebildet. Das Ergebnis der Transformation sind unter anderem die Symmetrischen Komponenten der Nutdurchflutungen, die ein Maß für die Strombeläge sind. Das Verhältnis der Strombeläge ergibt sich daher aus dem Verhältnis der Symmetrischen Komponenten des Stromvektors  $\underline{I}_{\text{rsk}}$  zu

$$\frac{A_{p_1}}{A_{p_2}} = \frac{|I_{\text{rsk} p_1}|}{|I_{\text{rsk} p_2}|} \quad (140)$$

Die Felderreggerkurven gehen aus den Strombelägen durch Integration über den Umfang hervor, so dass für eine Felderregger  $V_v$  der Polpaarzahl  $v$  gilt:

$$V_v \sim \frac{A_v}{v} \quad (141)$$

Für das Verhältnis der Felderregger gilt daher

$$\frac{V_{p_1}}{V_{p_2}} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{|I_{\text{rsk} p_1}|}{|I_{\text{rsk} p_2}|} \quad (142)$$

Soll die Rotorwicklung stromlos sein, obwohl Induktionsdrehfelder der Grundpolpaarzahlen im Luftspalt umlaufen, müssen diese beiden Felder im Rotor exakt die gleichen Spannungen induzieren, so dass die Spannungsdifferenz zum Treiben eines Rotorstromes verschwindet.

Da identische Stromsysteme auf Strombeläge und Felderreggerkurven der Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  führen, werden von den beiden Induktionsdrehwellen auch identische Spannungssysteme induziert. Sie werden im folgenden durch eine Spannung  $U_i$  gekennzeichnet.

Die Grundfelder mit den Induktionsamplituden  $\hat{B}_{p_1}$  und  $\hat{B}_{p_2}$  induzieren die Spannungen

$$U_{i p_1} = \omega_R \cdot \frac{\pi \cdot l_{\text{ideell}} \cdot D_{\text{bohrung}}}{2 p_1} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot w \cdot \xi_{p_1} \cdot \frac{\hat{B}_{p_1}}{\sqrt{2}} \quad (143)$$

$$U_{i p_2} = \omega_R \cdot \frac{\pi \cdot l_{\text{ideell}} \cdot D_{\text{bohrung}}}{2 p_2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot w \cdot \xi_{p_2} \cdot \frac{\hat{B}_{p_2}}{\sqrt{2}} \quad (144)$$

Die beiden Spannungen sind identisch, wenn für das Induktionsverhältnis  $K_B$  gilt:

$$K_B = \frac{\hat{B}_{p_1}}{\hat{B}_{p_2}} = \frac{|p_1|}{|p_2|} \cdot \frac{\xi_{p_2}}{\xi_{p_1}} \quad (145)$$

Mit den Beziehungen für das Verhältnis der Strombeläge folgt daraus:

$$K_B = \frac{\hat{B}_{p_1}}{\hat{B}_{p_2}} = \left| \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{A_{p_2}}{A_{p_1}} \right| = \frac{|p_1|}{|p_2|} \cdot \frac{|I_{\text{rsk} p_2}|}{|I_{\text{rsk} p_1}|} = \frac{|V_{p_2}|}{|V_{p_1}|} \quad (146)$$

Das Verhältnis der Induktionen verhält sich also genau umgekehrt wie das Verhältnis der Felderregger der beiden Grundfelder. Mit dem Flussdichteverhältnis  $K_B$  kann eine Rotorwicklung danach beurteilt werden, ob das Drehmoment der Maschine mit einer geringen Durchflutung erzeugt werden kann.

## 9.4 Wicklungsfaktor für die beiden Grundfelder

Der Wicklungsfaktor gibt an, welcher Anteil der gesamten Rotordurchflutung zur Erzeugung der beiden Grundfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  beiträgt. Er berücksichtigt insbesondere die Fälle, in denen sich die Durchflutungen verschiedener Zweige in einer Nut aufgrund der Phasenverschiebungen zwischen den Durchflutungen teilweise kompensieren. Das ist z. B. bei der Wicklung aus Abb. 9 bei den Nuten der Fall, in denen zwei Spulenseiten unterschiedlicher Zweige liegen. Der Mechanismus ist dabei ähnlich wie bei gesehten Zweischichtwicklungen für Drehstrommaschinen.

Als Ausgangsgrößen dienen der Vektor der Nutdurchflutungen in den einzelnen Wicklungslagen  $\underline{I}_{\text{rnutlage}}$  und der Vektor der symmetrischen Komponenten der Nutdurchflutung  $\underline{I}_{\text{rsk}}$  nach Gl. (50).

Die Nutdurchflutungen in den einzelnen Wicklungslagen ergeben sich mit der Matrix  $\underline{W}_{\text{mehr}}$  aus den Maschenströmen:

$$\underline{I}_{\text{rnutlage}} = \underline{W}_{\text{mehr}} \cdot \underline{I}_{\text{Rmasche}} \quad (147)$$

Die Maschenströme  $\underline{I}_{\text{Rmasche}}$  werden dabei entsprechend Gl. (45) berechnet.

Die gesamte Rotordurchflutung  $\Theta_{\text{r ges}}$  ergibt sich aus der Summe der einzelnen Beiträge der Nutdurchflutungen in den Wicklungslagen:

$$\Theta_{\text{r ges}} = \sum_{i=1 \dots N_f} \sum_{l=1 \dots L} |I_{\text{rnutlage} i, l}| \quad (148)$$

Die Rotordurchflutung zu den beiden Grundfeldern lässt sich aus den Komponenten des Vektors  $\underline{I}_{\text{rsk}}$ , Gl. (50) berechnen. Die Nutdurchflutung  $I_{\text{rnut} p_1 p_2 i}$  in der Nut  $i$  zu den beiden Symmetrischen Komponenten ergibt sich entsprechend der Rücktransformationsmatrix  $\underline{T}$  aus folgender Summe:

$$I_{\text{rnut} p_1 p_2 i} = \frac{1}{\sqrt{N_f}} \cdot \left( I_{\text{rsk} p_1} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N_f} \cdot i \cdot p_1} + I_{\text{rsk} p_2} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N_f} \cdot i \cdot p_2} \right) \quad (149)$$

Die Gesamtdurchflutung für die beiden Grundfelder berechnet sich aus der Summe der Beträge der Nutdurchflutungen in den einzelnen Nuten:

$$\Theta_{r_{ges} p_1 p_2} = \sum_{i=1 \dots N_f} |L_{rnut p_1 p_2 i}| \quad (150)$$

Der Wicklungsfaktor des Rotors für die beiden Grundfelder mit den Polpaarzahlen  $p_1$  und  $p_2$  berechnet sich damit aus dem Verhältnis der Durchflutung für die Grundfelder zur Gesamtdurchflutung:

$$\xi_{r p_1 p_2} = \frac{\Theta_{r_{ges} p_1 p_2}}{\Theta_{r_{ges}}} \quad (151)$$

Da im Zähler die Durchflutung für zwei Felder steht, kann der Wicklungsfaktor Werte größer als 1 annehmen.

Eine gute Rotorwicklung zeichnet sich auf der einen Seite dadurch aus, dass der Wicklungsfaktor recht groß ist. Auf der anderen Seite ist aber zu beachten, dass wie bei der Sehnung von Drehstromwicklungen durch eine geschickte Zuordnung von Zweigen mit Strömen unterschiedlicher Phasenlage eine Reduzierung der störenden Magnetfelder und eine bessere Kopplung zwischen den Grundfeldern erreicht wird. Dies drückt sich in einer kleinen Oberfeldstreuung aus.

Bei der Beurteilung für Wicklungen ist also nach einem guten Kompromiss zwischen einem großem Wicklungsfaktor  $\xi_{r p_1 p_2}$  und einer kleinen Oberfeldstreuung  $\sigma_{ow p_1 p_2}$  zu suchen.

## 10 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Analyse von Rotorwicklungen für Kaskadenmaschinen behandelt. Das Verfahren eignet sich allgemein für unsymmetrische Wicklungen in Drehfeldmaschinen. Dabei wird speziell die Rotorwicklung betrachtet.

Zunächst wird das Netzwerk der Rotorwicklung analysiert. Die unabhängigen Rotorströme werden dann mit Hilfe der symmetrischen Komponenten den Magnetfeldern zugeordnet. Die magnetische Kopplung durch die Magnetfelder wird mit den Mitteln der Drehfeldtheorie behandelt. Durch dieses Vorgehen lassen sich beliebige Rotorwicklungen analysieren und ihre Rückwirkung auf die Drehfelder der Statorwicklung beschreiben.

Im Resultat wird die Wirkung der Rotorwicklung auf die Rotorwicklung durch Selbst- und Gegeninduktivitäten beschrieben. Das Verfahren wird an den Beispielen eines unsymmetrischen Rotorkäfigs und einer Rotorwicklung für eine Kaskadenmaschine dargestellt.

Zur Charakterisierung der Rotorwicklung für Kaskadenmaschinen werden 4 Kenngrößen angegeben:

- Gesamtstreuung
- Oberfeldstreuung
- Flussdichteverhältnis
- Wicklungsfaktor

Diese Kenngrößen lassen eine Bewertung der Rotorwicklung für eine Kaskadenmaschine und einen Vergleich unterschiedlicher Wicklungen zu.

Mit dem dargestellten Verfahren zur Analyse von unsymmetrischen Wicklungen wird die Wirkung der Rotorwicklung auf die Statorwicklung/die Statorwicklungen durch eine Induktivitätsmatrix erfasst. Die Rotorwiderstände werden durch komplexe Werte in der Matrix berücksichtigt. Die Matrix beschreibt zum einen die Dämpfung eines Magnetfeldes der Statorwicklung durch die Rotorwicklung. Zum anderen erfasst sie die Kopplung zwischen verschiedenen Drehfeldern der Statorwicklung. Dies sind im Fall der Kaskadenmaschine in der Hauptsache die beiden Grundfelder.

## 11 Literatur

- [1] Müller, G., Vogt, K., Ponick, B.: Berechnung elektrischer Maschinen. Wiley-VCH (2008)
- [2] Gorginpour, H., Oraee, H., Abdi, E.: Calculation of Core and Stray Load Losses in Brushless Doubly Fed Induction Generators. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 61, NO. 7, JULY 2014 (2014)
- [3] R. A. McMahon, P. C. Roberts, X. Wang, and P. J. Tavner: Performance of the bdfm as a generator and motor. Proc. IEE B - Elec. Power App., vol. 153, pp. 289–299 (2006)
- [4] Hamed Gorginpour, Hashem Oraee, Richard A. McMahon: Electromagnetic-Thermal Design Optimization of the Brushless Doubly Fed Induction Generator. IEEE Transactions on industrial electronics, Vol. 61, NO. 4, (2014)
- [5] Fräger, C.: Neuartige Kaskadenmaschine für bürstenlose Drehzahlstellantriebe mit geringem Stromrichter Aufwand. VDI-Verlag (1995)
- [6] AUINGER, H.: Untersuchungen über neuartige polumschaltbare Dreiphasenwicklungen. Dissertation Technische Universität Graz (1977)
- [7] AUINGER, H.: Polumschaltbare Dreiphasenwicklungen mit 6 Anschlußenden nach dem Prinzip der Stromrichtungsumkehr. ETZ-A 98 (1977), H. 9, S. 628
- [8] AUINGER, H.: Neuartige polumschaltbare Dreiphasenwicklungen mit sechs Anschlußenden für elektrische Maschinen. Siemens Forschungs- und Entwicklungsberichte 7 (1978), H. 1, S. 1 – 10
- [9] AUINGER, H.: Universelle Entwurfsmethode für polumschaltbare Mehrphasenwicklungen mit wenig Anschlußenden. Siemens Forschungs- und Entwicklungsberichte 8 (1979), H. 6, S. 332 – 340
- [10] AUINGER, H.: Polumschaltbare Dreiphasenwicklungen mit 6 Anschlußenden nach dem Prinzip der Stromrichtungsumkehr. etzArchiv (1978), H. 1, S. 19 – 25



- [11] AUINGER, H.: Symmetrie von Mehrphasenwicklungen mit unterschiedlich gruppierten Parallelzweigen oder Wicklungssträngen. Siemens Forschungs- und Entwicklungsberichte 6 (1977), H. 4, S. 211 – 219
- [12] AUINGER, H.: Polumschaltbare Dreiphasenwicklungen nach dem Umgruppierungsprinzip mit teilausgenutzten Wicklungszweigen in beiden Polzahlstufen. Siemens Forschungs- und Entwicklungsberichte 8 (1979), H. 1, S. 37 – 40
- [13] AUINGER, H.: Polumschaltbare Wicklungen mit 6 Klemmen, Übersicht zum Stand der Technik. Bull. ASE/UCS 69 (1978), H. 17, S. 926 – 932
- [14] Fräger, C.: Kaskadenmaschine KSM: bürstenlose Induktionsmaschine für doppelt gespeiste Generatorsysteme – Wicklungsdurchflutungen und Flusssichteverhältnis. SERWISS  
URN: urn:nbn:de:bsz:960-opus4-30677,  
DOI: <https://doi.org/10.25968/opus-3067> (2024)
- [15] Heller, F., Kauders, W.: Das Görgessche Durchflutungspolygon. Archiv für Elektrotechnik 29 (1935), S. 599 – 616
- [16] Kremser, A.: Theorie der mehrsträngigen Bruchlochwicklungen und Berechnung der Zweigströme in Drehfeldmaschinen. VDI Fortschrittberichte, Reihe 21, Nr. 28, Dissertation Hannover (1988)
- [17] Wolf, B.: Die analytische Behandlung von Induktionsmaschinen mit trigonometrischen Interpolationspolynomen unter Berücksichtigung aller Wicklungsoberfelder. Dissertation Hannover (1979)
- [18] Morath, E.: Magnetische Kopplung zwischen in Nuten verlegten Wicklungen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik 9 (1967), S. 84 – 94
- [19] Horneber, E.-H.: Simulation elektrischer Schaltungen auf dem Rechner. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokio (1985), S. 79 – 109

## 12 Autor



**Prof. Dr.-Ing. Carsten Fräger** ist Mitglied des Instituts Forschungszentrums Energie – Mobilität – Prozesse (EMP), Abteilung für Konstruktionselemente, Mechatronik und Elektromobilität (IKME) der Hochschule Hannover. Er vertritt die Mechatronik mit den Themen Elektrische Antriebe und Servoantriebe, Modellbildung technischer Systeme, sowie die Auslegung mechatronischer Systeme. Er studierte Elektrotechnik an der Universität Paderborn und an der Leibniz-Universität Hannover. 1994 promovierte er am Institut für Elektrische Maschinen und Antriebe der Leibniz-Universität Hannover. Bei der Fa. Lenze/Aerzen leitete er die Motorenentwicklung und das Produktmanagement Servoantriebe. Er engagiert sich aktiv als Mitglied im Fachbereich Antriebstechnik FBA1 und im Fachausschuss Elektrische Geräte- und Stellantriebe FA3.3 des VDE. Er arbeitet in den Programmausschüssen der Konferenz Innovative Klein- und Mikroantriebstechnik IKMT. Im IEEE ist er aktiv als Reviewer für Beiträge der Mechatronik tätig.