



Prof. Dr. habil.
Hartmut Grabinski,
Leibniz Universität Hannover



Dr. Mark Stemmler,
Nexans Hannover



Prof. Dr. Fred Wiznerowicz,
Hochschule Hannover

leistung auftritt, die in Lehrbüchern bisher nicht beschrieben worden ist. Bei reiner symmetrischer Wirklast treten dagegen keine Besonderheiten auf.

1 Einphasiges Koaxial-Kabel

Zur Erläuterung der verwendeten Ansätze sei zunächst ein einphasig an Wechselspannung betriebenes Koaxial-Kabel gemäß *Bild 1* betrachtet. Das Kabel besteht aus dem Leiter 1 mit den Radien r_{11} und r_{12} sowie dem Leiter 2 mit den Radien r_{21} und r_{22} . Leiter 1 führt den Wechselstrom i_1 , Leiter 2 den Wechselstrom $i_2 = -i_1$. Zwischen den Leitern liegt die Wechselspannung u_{12} .

Die im Kabel übertragene Leistung p lässt sich mit Hilfe der Spannung u_{12} und des Stromes i_1 berechnen, wie es in der Elektrotechnik allgemein üblich ist. Man kann die Leistung jedoch auch mit Hilfe des elektrischen und des magnetischen Feldes berechnen. Das zeigt beispielsweise das Lehrbuch [Fü] im Fall von Gleichspannung. Hier sei die Rechnung für Wechselspannung dargestellt.

1.1 Berechnung der Leistung aus Spannung und Strom

1.1.1 Wirklast

Nimmt man an, dass u_{12} und i_1 gleiche Phasenlage haben, so gilt beispielsweise

$$u_{12} = U_{12} \sqrt{2} \sin \omega t \quad (1)$$

$$\text{und } i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin \omega t$$

U_{12} bzw. I_1 sind die Effektivwerte der Spannung bzw. des Stromes; ω ist die Kreisfrequenz. Die Leistung p ergibt sich zu

$$p = u_{12} i_1 = 2 U_{12} I_1 \sin^2 \omega t. \quad (2)$$

Mit $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$ wird daraus

$$p = U_{12} I_1 (1 - \cos 2\omega t). \quad (3)$$

Dieser bekannte Verlauf ist in *Bild 2* dargestellt (durchgezogene Linie). Die Leistung ist immer größer oder gleich

T4 Übertragung der Leistung auf einem Koaxial-Kabel für Drehstrom

Im Herbst 2013 wurde in Essen ein supraleitendes dreiphasiges Koaxial-Kabel-System installiert. Dieses Ereignis regte dazu an, die Art und Weise der Leistungsübertragung auf diesem Kabel genauer zu analysieren, um die physikalischen Vorgänge besser zu verstehen. Mit Hilfe elementarer Gesetze und Gleichungen wird gezeigt, dass bei reiner symmetrischer **Blindlast** auf dem Kabel dennoch eine zirkulierende **Wirk-**

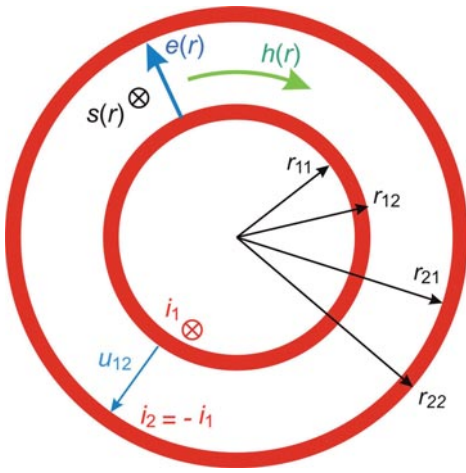


Bild 1: Einphasig betriebenes Koaxial-Kabel
 $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$ Innen-, Außen-Radien der Leiter
 i_1, i_2 Strom in den Leitern 1 und 2
 u_{12} Spannung zwischen Leiter 1 und Leiter 2
 $e(r)$ elektrische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2
 $h(r)$ magnetische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2
 $s(r)$ Leistungsdichte im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2

Null. Es wird also stets eine Leistung in einer Richtung übertragen. Der zeitliche Mittelwert der Leistung p ist die Wirkleistung P .

$$P = U_{12} I_1 \quad (4)$$

1.1.2 Blindlast

Nimmt man an, dass der Strom gegenüber der Spannung um 90° nacheilt, so gilt beispielsweise

$$u_{12} = U_{12} \sqrt{2} \sin \omega t \quad (5)$$

$$\text{und } i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$$

Die Leistung p ergibt sich dann zu $p = u_{12} i_1 = 2 U_{12} I_1 \sin \omega t \sin(\omega t - 90^\circ)$. (6)

Mit $\sin \omega t \sin(\omega t - 90^\circ) = -\frac{1}{2} \cos(2\omega t - 90^\circ) = -\frac{1}{2} \sin 2\omega t$ wird daraus

$$p = u_{12} i_1 = -U_{12} I_1 \sin 2\omega t \quad (7)$$

Auch dieser bekannte Verlauf ist in Bild 2 (gestrichelte Linie) dargestellt. Die Leistung pendelt um die Null-Linie. Der zeitliche Mittelwert der Leistung p ist gleich Null. Im zeitlichen Mittel wird also keine

physikalische Leistung übertragen. Das Produkt

$$U_{12} I_1 = Q \quad (8)$$

wird dann Blindleistung genannt.

1.2 Berechnung der Leistung aus der elektrischen und der magnetischen Feldstärke

Im Bereich zwischen den Leitern bildet sich ein elektrisches Feld aus, dessen Feldstärke e von der Spannung u_{12} abhängig ist. Für u_{12} wird derselbe zeitliche Verlauf wie in Gl. (1) angenommen. Außerdem ist die Feldstärke e vom Abstand r des betrachteten Punktes im Feld von den Achsen der Leiter abhängig. Es gilt für die elektrische Feldstärke [Ku]

$$e(r) = \frac{U_{12} \sqrt{2}}{r \ln \frac{r_{21}}{r_{12}}} \sin \omega t \quad (9)$$

Gemäß Durchflutungsgesetz bewirkt der Strom i_1 das magnetische Feld mit der magnetischen Feldstärke $h(r)$ [Ku].

1.2.1 Wirklast

Für i_1 wird derselbe Verlauf wie in Gl. (1) angenommen. Man erhält

$$h(r) = \frac{I_1 \sqrt{2}}{2 \pi r} \sin \omega t \quad (10)$$

Elektrische und magnetische Feldstärke sind Vektoren. Ihre Richtung ist in Bild 1 durch je eine Feldlinie beschrieben. Das Vektorprodukt der Feldvektoren ist wiederum ein Vektor. Er wird Poynting-Vektor genannt und gibt die Leistungsdichte (Leistung pro Fläche) s in einem Punkt des Feldes an. Die Richtung des Poynting-Vektors ist in Bild 1 ebenfalls durch eine Feldlinie (in die Zeichenebene hinein) beschrieben. Der Betrag der Leistungsdichte $s(r)$ ergibt sich gemäß [Fü] hier als Produkt aus $e(r)$ und $h(r)$. Mit Hilfe der Gln. (9) und (10) erhält man also

$$s(r) = e(r) h(r) = \frac{U_{12} I_1}{\pi r^2 \ln \frac{r_{21}}{r_{12}}} \sin^2 \omega t \quad (11)$$

Die übertragene Leistung p errechnet sich dann dadurch, dass man über die gesamte Fläche zwischen den Leitern integriert:

$$p = \int_{r_{12}}^{r_{21}} s(r) 2\pi r dr \quad (12)$$

$$= \frac{2 U_{12} I_1 \sin^2 \omega t}{\ln \frac{r_{21}}{r_{12}}} \int_{r_{12}}^{r_{21}} \frac{1}{r} dr$$

$$= 2 U_{12} I_1 \sin^2 \omega t$$

$$= U_{12} I_1 (1 - \cos 2 \omega t) \quad (13)$$

Das stimmt mit Gl. (3) überein, wie es sein muss.

1.2.2 Blindlast

Für die Spannung u_{12} und den Strom i_1 wird derselbe Verlauf wie in Gl. (5) angenommen. Damit gilt für die elektrische Feldstärke $e(r)$ die Gl. (9). Für die magnetische Feldstärke erhält man

$$h(r) = \frac{I_1 \sqrt{2}}{2 \pi r} \sin(\omega t - 90^\circ) \quad (14)$$

Entsprechend Gl. (11) und (12) errechnet man hieraus die Leistungsdichte $s(r)$ und schließlich die Leistung p . Das Ergebnis stimmt natürlich mit Gl. (7) überein.

Es zeigt sich also, dass man die übertragene Leistung sowohl auf dem allgemein bekannten Weg mit Hilfe von Strom und Spannung berechnen kann, aber auch mit Hilfe der elektrischen und der magnetischen Feldstärke. Der zuletzt genannte Weg lässt erkennen, dass die eigentliche Übertragung der Leistung **außerhalb** der Leiter erfolgt, weil im Innern der Leiter kein elektrisches Feld existiert.

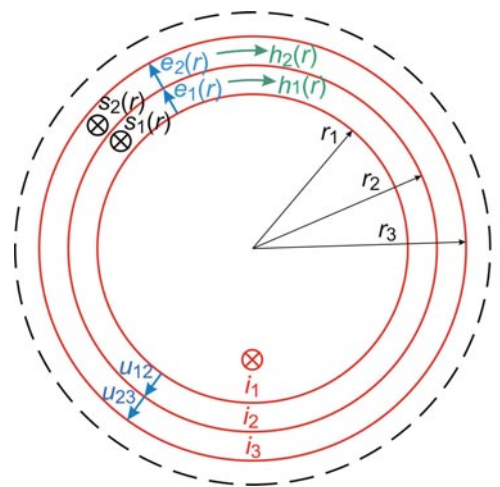


Bild 3: Querschnitt eines dreiphasigen supraleitenden Koaxial-Kabels (prinzipiell)
 r_1, r_2, r_3 Radien der Leiter 1, 2 und 3
 i_1, i_2, i_3 Strom in den Leitern 1, 2 und 3
 u_{12}, u_{23} Spannung zwischen den Leitern 1 und 2 sowie 2 und 3
 $e_1(r), e_2(r)$ elektrische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und 2 sowie 2 und 3
 $h_1(r), h_2(r)$ magnetische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und 2 sowie 2 und 3
 $s_1(r), s_2(r)$ Leistungsdichte im Bereich zwischen Leiter 1 und 2 sowie 2 und 3

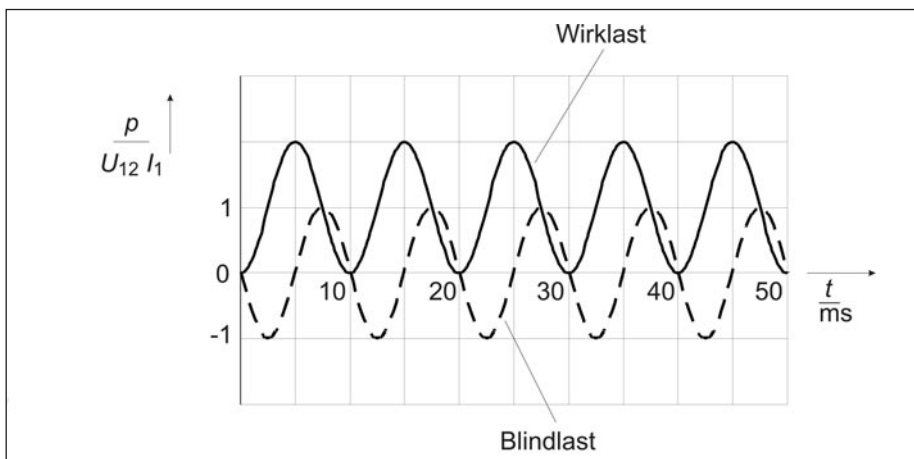


Bild 2: Zeitlicher Verlauf der Leistung beim einphasig betriebenen Koaxial-Kabel bei reiner Wirklast und bei reiner Blindlast

2. Dreiphasiges Koaxial-Kabel

Beim Koaxial-Kabel für Drehstrom soll die Leistungsberechnung mit Hilfe der Feldstärken angewandt werden, weil sich daraus neue Erkenntnisse ergeben. Bild 3 zeigt den prinzipiellen Aufbau des jüngst in Deutschland verlegten supraleitenden dreiphasigen Koaxial-Kabels. Da die Dicke der supraleitenden Schichten der Leiter sehr gering ist (etwa 0,2 mm), wird nicht zwischen Innen- und Außenradius der Leiter unterschieden, denn die Radien der Leiter sind um einen Faktor von mehr als 100 größer. Die Spannung zwischen jeweils zwei Leitern beträgt $U=10$ kV, der Strom in den Leitern ist jeweils $I=2310$ A. Es wird symmetrische Belastung vorausgesetzt. Daher ist der Strom in dem gestrichelt dargestellten Null-Leiter gleich Null, und außerhalb des Leiters 3 ist kein magnetisches Feld vorhanden. Nur in den Bereichen zwischen den Leitern 1 und 2 sowie zwischen den Leitern 2 und 3 treten sowohl ein elektrisches als auch ein magnetisches Feld auf; nur dort findet also die Übertragung der Leistung statt.

2.1 Wirklast

Bild 4 zeigt die zur Berechnung der Felder notwendigen Spannungen und Ströme im Zeigerbild. Der Phasenwinkel der Spannung U_{12} wird gleich Null gewählt. Entsprechend Gl. (9) gilt dann für die elektrische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2

$$e_1(r) = \frac{U \sqrt{2}}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \sin \omega t. \quad (15)$$

Der Strom in Leiter 1 hat den Verlauf

$$i_1 = I \sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ). \quad (16)$$

Damit erhält man für die magnetische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2

$$h_1(r) = \frac{I \sqrt{2}}{2 \pi r} \sin(\omega t - 30^\circ). \quad (17)$$

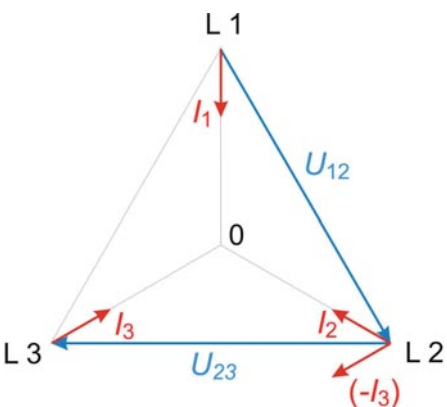


Bild 4: Zeigerbild für symmetrische Wirklast
 U_{12}, U_{23} Effektivwert-Zeiger der Spannung zwischen den Leitern 1 und 2 sowie 2 und 3
 I_1, I_2, I_3 Effektivwert-Zeiger des Stromes in den Leitern 1, 2 und 3

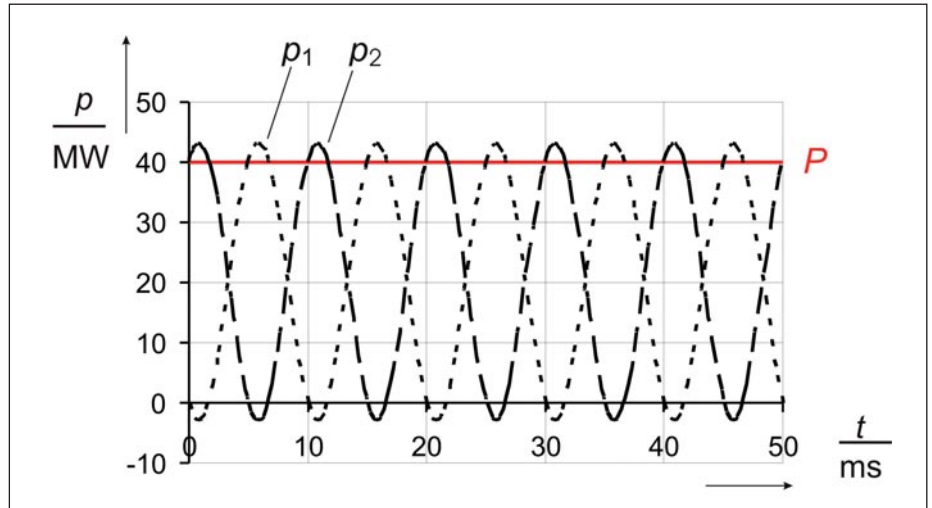


Bild 5: Zeitlicher Verlauf der Leistung bei reiner Wirklast
 p_1, p_2 Leistung im Bereich zwischen den Leitern 1 und 2 sowie 2 und 3
 P gesamte Leistung

Entsprechend dem Vorgehen in den Gleichungen (11) und (12) errechnet man die Leistungsdichte $s_1(r)$ und die Leistung p_1 im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2. Man erhält

$$p_1 = U I \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(2\omega t - 30^\circ) \right]. \quad (18)$$

Im Bereich zwischen den Leitern 2 und 3 ergibt sich die elektrische Feldstärke $e_2(r)$ aus der Spannung U_{23} zu

$$e_2(r) = \frac{U \sqrt{2}}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \frac{1}{r} \sin(\omega t - 120^\circ). \quad (19)$$

Die magnetische Feldstärke $h_2(r)$ wird mit Hilfe des Stromes $i_1+i_2=-i_3$ berechnet:

$$h_2(r) = \frac{I \sqrt{2}}{2 \pi r} \sin(\omega t - 90^\circ). \quad (20)$$

Entsprechend dem Vorgehen in den Gleichungen (11) und (12) errechnet man die Leistungsdichte $s_2(r)$ und die Leistung p_2 im Bereich zwischen Leiter 2 und Leiter 3. Man erhält

$$p_2 = U I \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(2\omega t - 30^\circ) \right]. \quad (21)$$

Der zeitliche Verlauf der Leistungen p_1 und p_2 ist in Bild 5 eingetragen. Die Summe dieser Leistungen ist zeitlich konstant und beträgt

$$P = p_1 + p_2 = \sqrt{3} U I = 40 \text{ MW}. \quad (22)$$

Die übertragene Wirkleistung teilt sich also unabhängig von den Radien zu gleichen Teilen auf die Bereiche zwischen den Leitern 1 und 2 sowie 2 und 3 auf.

2.2 Blindlast

Bild 6 zeigt die zur Berechnung der Felder notwendigen Spannungen und Ströme im Zeigerbild, wenn das Kabel symmetrisch rein induktiv belastet ist. Der Phasenwinkel der Spannung U_{12} wird gleich Null gewählt. Für die elektrische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2 gilt weiterhin Gl. (15).

Der Strom in Leiter 1 hat den Verlauf

$$i_1 = I \sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ). \quad (23)$$

Damit gilt für die magnetische Feldstärke im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2

$$h_1(r) = \frac{I \sqrt{2}}{2 \pi r} \sin(\omega t - 120^\circ). \quad (24)$$

Wieder entsprechend dem Vorgehen in den Gleichungen (11) und (12) errechnet man die Leistungsdichte $s_1(r)$ und die Leistung p_1 im Bereich zwischen Leiter 1 und Leiter 2. Man erhält

$$p_1 = U I \left[-\frac{1}{2} + \cos(2\omega t + 60^\circ) \right]. \quad (25)$$

Im Bereich zwischen den Leitern 2 und 3 ergibt sich die elektrische Feldstärke $e_2(r)$ aus der Spannung U_{23} gemäß Gl. (19).

Die magnetische Feldstärke $h_2(r)$ wird mit Hilfe des Stromes $i_1+i_2=-i_3$ berechnet:

$$h_2(r) = \frac{I \sqrt{2}}{2 \pi r} \sin(\omega t - 180^\circ). \quad (26)$$

Wie in den Gleichungen (11) und (12) errechnet man die Leistungsdichte $s_2(r)$ und die Leistung p_2 im Bereich zwischen Leiter 2 und Leiter 3. Man erhält

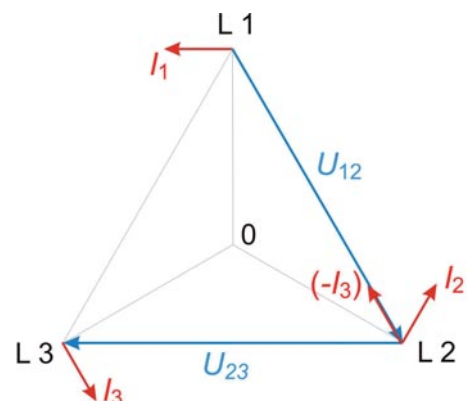


Bild 6: Zeigerbild für symmetrische Blindlast
 U_{12}, U_{23} Effektivwert-Zeiger der Spannung zwischen den Leitern 1 und 2 sowie 2 und 3
 I_1, I_2, I_3 Effektivwert-Zeiger des Stromes in den Leitern 1, 2 und 3

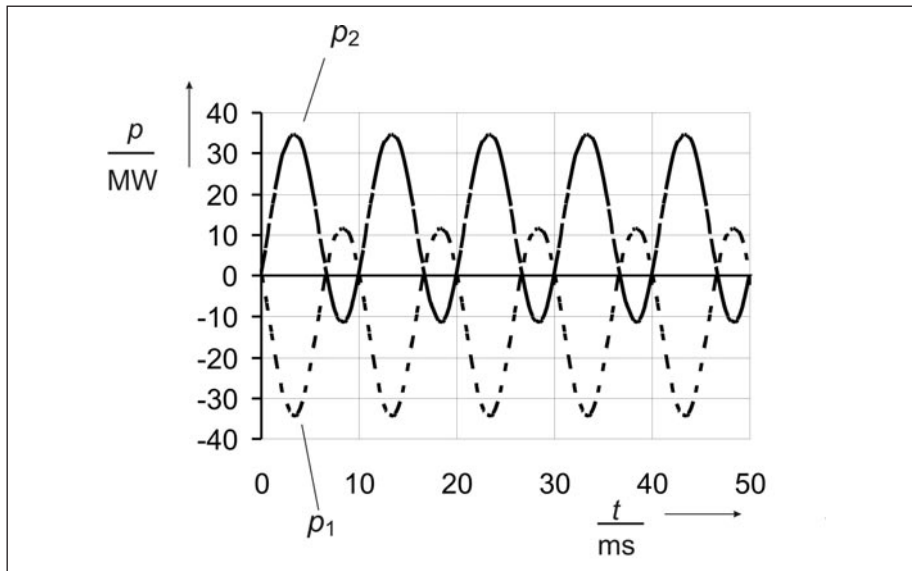


Bild 7: Zeitlicher Verlauf der Leistung bei reiner symmetrischer Blindlast
 p_1 , p_2 Leistung im Bereich zwischen den Leitern 1 und 2 sowie 2 und 3

$$p_2 = U I \left[\frac{1}{2} - \cos(2\omega t + 60^\circ) \right]. \quad (27)$$

Der zeitliche Verlauf der Leistungen p_1 und p_2 ist in Bild 7 eingetragen. Die Leistung p_1 hat einen negativen Mittelwert, nämlich

$$P_1 = -\frac{U I}{2} = -\frac{23,1 \text{ MW}}{2} = -11,6 \text{ MW}. \quad (28)$$

Die Leistung p_2 hat einen positiven Mittelwert, nämlich

$$P_2 = +11,6 \text{ MW}. \quad (29)$$

Es zirkuliert also eine Wirkleistung durch den Bereich 2 in Richtung zum Verbraucher und durch den Bereich 1 zurück zum Generator, obwohl das gesamte Kabel laut Voraussetzung symmetrisch rein induktiv belastet ist. Die vorzeichenrichtig gebildete Summe ($p_1 + p_2$) ist zu jedem Zeitpunkt gleich Null; es wird also keine Wirkleistung übertragen, wie es sein muss.

Eine zirkulierende Wirkleistung wurde schon für eine dreiphasige Freileitung berechnet. Sie tritt immer dann auf, wenn entweder die Last oder die Anordnung der Leitungsseile unsymmetrisch sind [Gra10; Gra11a; Gra11b]. Im vorliegend behandelten Fall des dreifach coaxialen Kabels ist die Anordnung der drei Leiter unsymmetrisch.

3. Zusammenfassung

Ingenieure berechnen die übertragene Leistung einer Leitung üblicherweise aus Spannung und Strom. Alternativ kann die Leistung auch mit Hilfe des Poynting-Vektors berechnet werden. Dies erscheint zunächst unzweckmäßig, weil dazu das elektrische und das magnetische Feld der Leitung ermittelt werden müssen. Allerdings offenbart der Poynting-Vektor, dass die Leistung nicht in den Leitern selbst übertragen wird, sondern außer-

halb der Leiter in den Bereichen des Raumes, in denen gleichzeitig ein elektrisches und ein magnetisches Feld vorhanden sind. Der Poynting-Vektor zeigt also das physikalische Geschehen.

Für besonders einfache Anordnungen lassen sich die Felder mit elementaren Gleichungen berechnen, so für das hier behandelte dreifach coaxiale Drehstromkabel. Dabei zeigt sich, dass bei dem symmetrisch rein induktiv belasteten Kabel eine zirkulierende Wirkleistung auftritt.

Literatur

- [Fü] Führer, A., Heidemann, K.; Nerreter, W.: Grundgebiete der Elektrotechnik 2. München: Carl Hanser Verlag, 9. Aufl. 2011
- [Gra10] Grabinski, H.; Wiznerowicz, F.: Energy transfer on three-phase high-voltage lines: the strange behavior of the Poynting vector. Electr Eng (2010) 92:203-214
- [Gra11a] Grabinski, H.; Wiznerowicz, F.: Spatial energy flow distribution on three-phase high-voltage lines. 17th Int. Symp. on high voltage engineering (ISH). August, 22-26, 2011, Hannover
- [Gra11b] Grabinski, H.; Wiznerowicz, F.: Wirkleistung fließt auch bei reiner, aber asymmetrischer Blindlast. ew 110 (2011), Heft 25-26, S. 82-85
- [Ku] Kuhnert, E.; Wiznerowicz, F.: Eigenschaften von Energiekabeln und deren Messung. Frankfurt am Main: EW Medien und Kongresse, 3. Auflage 2012