

Hochschule Hannover  
University of Applied Sciences and Arts

Fakultät I – Elektro- & Informationstechnik  
Fachgebiet Ingenieurinformatik & angewandte Mathematik  
(EIT – IAM)  
Fachgebiet Regelungstechnik & Mechatronik  
(EIT – RTM)

# Systemtheorie und Optimale Regelung

## Teil IV Regelungs- & Beobachtungsnormalform

Mohammad Beyki, M.Eng.  
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Lindemann  
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Kutzner

8. Februar 2023

## 4 Wichtige Normalformen der Zustandsraumbe- schreibung

In der Zustandsraumdarstellung haben sich ein paar wichtige Normalformen herauskristallisiert, welche sich für jeweils spezielle Fälle von Rechenoperationen besser eignen. Beispielsweise ist für die Reglerauslegung die Regelungsnormalform (RNF) besonders gut geeignet, da sich aus ihr einige der Rechenschritte vereinfachen lassen. Analog dazu gilt auch für die Beobachtungsnormalform (BNF) diese Vereinfachung für die Beobachterausslegung. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten Normalformen vorgestellt. Beide im Folgenden beschriebene Formen eignen sich nur für SISO-Systeme.

### 4.1 Regelungsnormalform

Die RNF<sup>1</sup> ist eine mögliche Darstellungsform der ZRD<sup>2</sup> und hat folgende Gestalt [1], [2]:

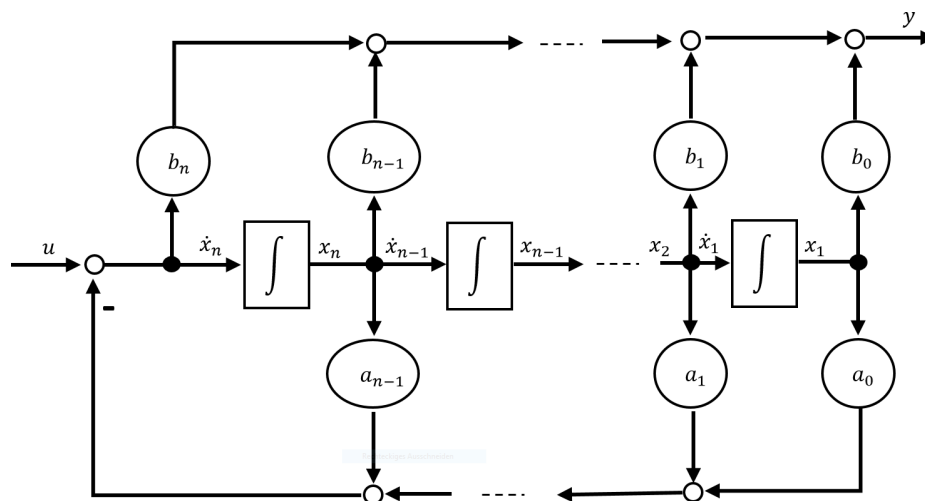


Abbildung 4.1: RNF als Blockschaftbild

<sup>1</sup> Otto Föllinger: Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 8. Auflage. Hüthig Verlag, Heidelberg 1994

J. Ackermann: Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. Regelungstechnik 20 (1972), S. 297–300.

<sup>2</sup>ZRD: Zustandsraumdarstellung

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Dann hat die ZRD die Gestalt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_R &= \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{x}_R + \mathbf{b}_R \cdot u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}_R^T \cdot \mathbf{x}_R + \mathbf{d}_R \cdot u \end{aligned}$$

Mit folgenden Matrizen und Vektoren:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} := \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_R^T = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \dots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})]$$

$$\mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_R = b_n$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{R,1} \\ \dot{x}_{R,2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{R,n-1} \\ \dot{x}_{R,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_R} \cdot \begin{bmatrix} x_{R,1} \\ x_{R,2} \\ \vdots \\ x_{R,n-1} \\ x_{R,n} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_R} \cdot u$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{[(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \dots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})]}_{\mathbf{c}_R^T} \cdot \begin{bmatrix} x_{R,1} \\ x_{R,2} \\ \vdots \\ x_{R,n} \end{bmatrix} + \underbrace{b_n}_{\mathbf{d}_R} \cdot u$$

## 4.2 Beispiel einer RNF

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{7s^3 + 3s^2 - 2s + 4}{s^3 + 90s^2 + 2s + 3} = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

Zunächst werden die entsprechenden Koeffizienten des Nenners und des Zählers herausgeschrieben.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 90 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Im nächsten Schritt erst werden die Formeln zur Darstellung der RNF verwendet und die eben herausgeschriebenen Koeffizienten eingetragen in die Formeln. Die Matrizen der RNF ergeben sich dann wie folgt:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -90 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_R^T = [-17 \quad -16 \quad -627] \quad \text{und} \quad d_R = 7$$

Möchte man darüber hinaus das System in RNF-Darstellung angeben, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -90 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_R + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y &= [-17 \quad -16 \quad -627] \cdot \mathbf{x}_R + 7 \cdot u \end{aligned}$$

Der interessierte Leser mag sich an dieser Stelle die Frage stellen, wie denn nun überhaupt das betrachtete System im Zeitbereich aussehen kann. Zum einen sollte anhand der Koeffizienten der Übertragungsfunktion insbesondere des Nenners deutlich sein, dass es sich um ein schwingungsfähiges System handelt (Hurwitz-Kriterium für die Stabilität von Systemen). Zum anderen ließe sich auch schnell

eine Abschätzung für die Stabilität des Systems abgeben, da  $\alpha_2 = 90$  bekannt ist und dieser Koeffizient signifikant größer als der Rest der Koeffizienten ist. Folglich handelt es sich um ein stabiles, jedoch schwingungsfähiges System dritter Ordnung. Das Ausgangssignal dazu sieht dann wie folgt aus [1], [2] :

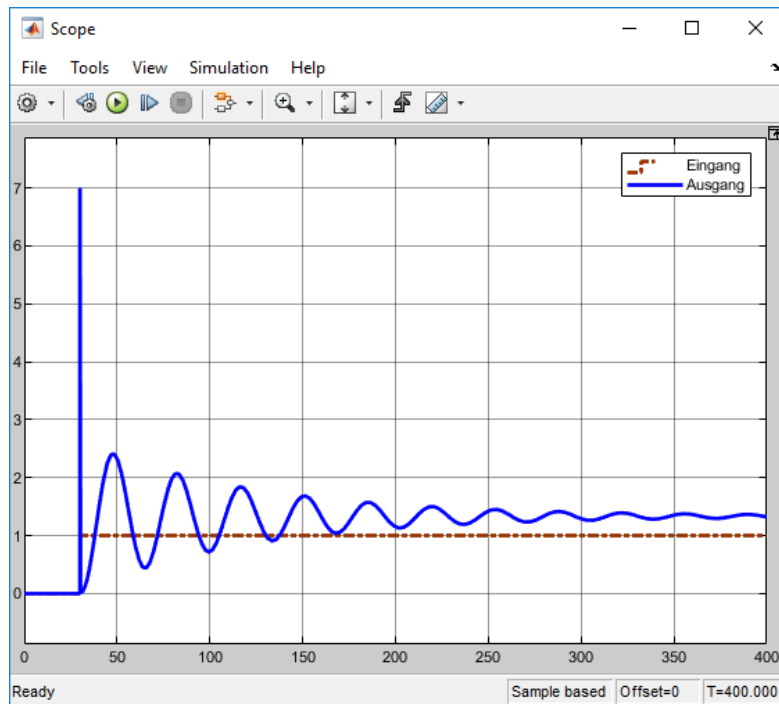


Abbildung 4.2: Eingang  $u(t)$  und Ausgang  $y(t)$

### 4.3 Beobachtungsnormalform

Als nächstes soll die BNF<sup>3</sup> vorgestellt werden [1], [2].

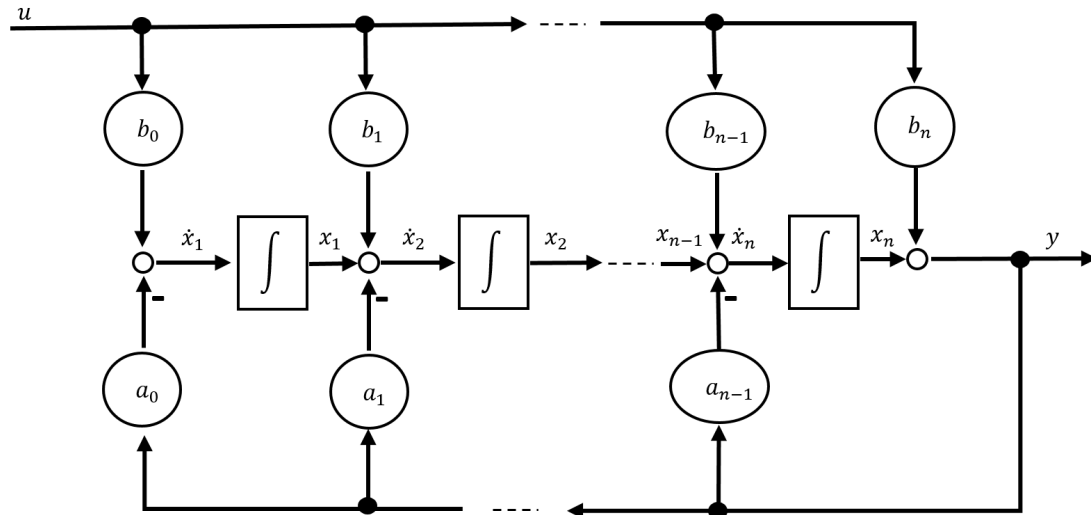


Abbildung 4.3: BNF als Blockschaltbild

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Dann hat die ZRD die Gestalt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_B &= \mathbf{A}_B \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{b}_B \cdot u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}_B^T \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{d}_B \cdot u \end{aligned}$$

Mit folgenden Matrizen und Vektoren:

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \\ \mathbf{I} & -\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} := \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

<sup>3</sup> Otto Föllinger: Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 8. Auflage. Hüthig Verlag, Heidelberg 1994

J. Ackermann: Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. Regelungstechnik 20 (1972), S. 297–300.

$$\mathbf{b}_B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T = [0^T \quad 1] \quad \text{und} \quad d_B = d$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{B,1} \\ \dot{x}_{B,2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{B,n-1} \\ \dot{x}_{B,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B} \cdot \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ x_{B,2} \\ \vdots \\ x_{B,n-1} \\ x_{B,n} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_B} \cdot u$$

$$y = \underbrace{[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]}_{\mathbf{c}_B^T} \cdot \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ x_{B,2} \\ \vdots \\ x_{B,n} \end{bmatrix} + \underbrace{d}_{d_B} \cdot u$$

#### 4.4 Beispiel BNF

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{7s^3 + 3s^2 - 2s + 4}{s^3 + 90s^2 + 2s + 3} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Die BNF ergibt sich dann wie folgt:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 90 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -90 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -627 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -90 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_B + \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -627 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = [0 \ 0 \ 1] \cdot \mathbf{x}_B + 0 \cdot u$$

$$\mathbf{c}_B^T = [0 \ 0 \ 1]$$

Das Ausgangssignal ist genau dasselbe aus dem Beispiel zur RNF:

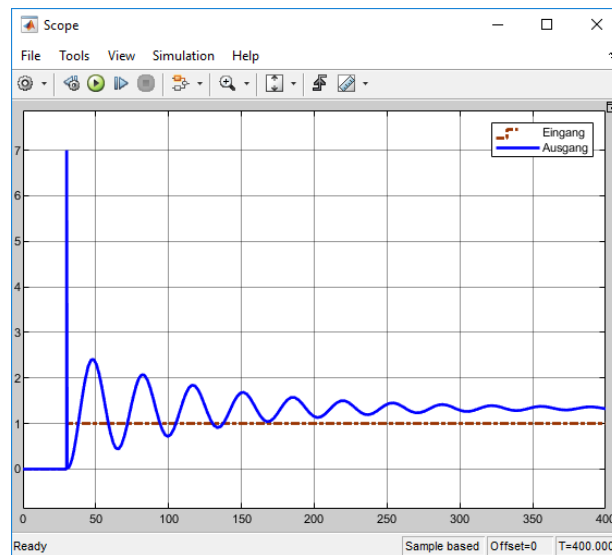


Abbildung 4.4: Eingang  $u(t)$  und Ausgang  $y(t)$

## 4.5 Zusammenhang zwischen RNF und BNF

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_R^T, \quad \mathbf{b}_B = \mathbf{c}_R, \quad \mathbf{c}_B = \mathbf{b}_R$$



## Acknowledgements

The authors would like to thank Hannover School for Nanotechnology (hsn) Leibniz University Hannover (LUH) Laboratory of Nanotechnology and Quantum Engineering (LNQE), Prof. Dr. Dr. h. c. Franz Renz Institute of Inorganic Chemistry (LUH) and Prof. Dr.-Ing. Robert Patzke University of Applied Sciences and Arts.

## Literatur

- [1] Otto Föllinger u. a. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 13., überarbeitete Auflage. Berlin Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2022. 452 S. ISBN: 978-3-8007-5518-9.
- [2] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-52675-0 978-3-662-52676-7. DOI: 10.1007/978-3-662-52676-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-52676-7> (besucht am 07. 02. 2023).