Hochschule Hannover
University of Applied Sciences and Arts

Fakultät I – Elektro- & Informationstechnik
Fachgebiet Ingenieurinformatik & angewandte Mathematik
(EIT – IAM)
Fachgebiet Regelungstechnik & Mechatronik
(EIT – RTM)

Systemtheorie und Optimale Regelung

Teil III
Beobachtbarkeit

Mohammad Beyki, M.Eng.
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Lindemann
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Kutzner

16. Februar 2023

3 Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit von Systemen ermöglicht es eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den definierten Zustandsgrößen $\mathbf{x}$ und der Messbarkeit der Ausgänge $\mathbf{y}$ zu treffen. Wenn ein System vollständig beobachtbar ist, lässt sich der Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ aus dem gemessenen Vektor $\mathbf{y}$ rekonstruieren bzw. schätzen. In Kapitel I wurden bereits die ZRD[1] und ihre charakteristischen Matrizen vorgestellt. Nun werden besagte Matrizen genutzt um Aussagen über das System treffen zu können. Gegenstand dieser Betrachtungen werden LTI-Systeme in ZRD mit folgender Beschreibung sein [1], [2], [5]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

Dabei gibt die Systemmatrix $\mathbf{A}$ die Ordnung n des Systems an. D.h. ist $\mathbf{A}$ eine 2 x 2 - Matrix, so hat das System die Ordnung $n = 2$, bei 3 x 3 ist $n = 3$ usw.

3.1 Beobachtbarkeit nach Kalman

Zunächst wird die Beobachtbarkeit nach Kalman[2] betrachtet: Es wird die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_\mathrm{B}$ eingeführt [1], [2], [3], [4]:

$$\mathbf{Q}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Nach Kalman reicht es aus vollständige Beobachtbarkeit eines Systems vorauszusetzen, wenn der Rang von $\mathbf{Q}_\mathrm{B}$ nicht gemindert wird. Dies lässt sich über Höchstrang zeigen (ist $\mathbf{Q}_\mathrm{B}$ eine quadratische Matrix, so kann auch der Weg über die Determinantenbildung ungleich null gewählt werden):

$$\mathsf{det}(\mathbf{Q}_\mathrm{B}) \neq 0 \quad \mathsf{oder} \quad \mathsf{rang}(\mathbf{Q}_\mathrm{B}) = n,$$

wobei n für vollen Rang stehen muss.

[1] ZRD: Zustandsraumdarstellung

[2] Otto Föllinger: Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 8. Auflage. Hüthig Verlag, Heidelberg 1994

3.2 Beispiel: Beobachtbarkeit nach Kalman

Gegeben sei ein Beispiel-System mit folgender Beschreibung:

$$\dot{x} = \mathbf{A} \cdot x + \mathbf{b} \cdot u$$
$$y = \mathbf{c}^T \cdot x + d \cdot u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d = 1$$

Die Ordnung des Systems ist $n = 2$, da $\mathbf{A}$ eine 2 x 2 - Systemmatrix ist. Es kann erwartet werden, dass bei vollständiger Beobachtbarkeit die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ vollen Rang von $n = 2$ aufweist oder die Determinante von $\mathbf{Q}_B$ ungleich Null ist.

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix ergibt sich im zweiten Schritt zu:

$$rang(\mathbf{Q}_B) = 2$$

Das System ist somit vollständig beobachtbar nach Kalman. An dieser Stelle muss $\det(\mathbf{Q}_B)$ nicht mehr gebildet werden, aber um einen Vergleich zu sehen, wird diese Methode ebenfalls ausgeführt:

$$\det(\mathbf{Q}_B) = (-2) \neq 0$$

Auch diese Bedingung für die Beobachtbarkeit nach Kalman wird erfüllt und zeigt ebenfalls vollständige Beobachtbarkeit auf.

3.3 Beobachtbarkeit nach Hautus

Als nächstes folgt die Beobachtbarkeit nach Hautus[3]. Diese wird nach folgender Gleichung bestimmt [1], [2], [3], [4]:

$$\mathrm{rang}\begin{bmatrix}\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ C\end{bmatrix} = n \quad \mathrm{mit} \quad i = 1, ..., n$$

Da λ_i verwendet wird, kann darauf geschlossen werden, dass für jeden Eigenwert gesondert das System auf Beobachtbarkeit untersucht wird. Somit kann für ein System nicht nur eine Aussage im allgemeinen Sinne über die Beobachtbarkeit getroffen werden, sondern sogar eine spezielle Betrachtung bezüglich jedes einzelnen Eigenwertes vorgenommen werden. Auf diese Weise ist sogar bekannt, welcher Zustand x_i eines Systems nicht beobachtbar ist.

3.4 Beispiel: Beobachtbarkeit nach Hautus

Um die Beobachtbarkeit nach Hautus durchführen zu können, werden zunächst die Eigenwerte λ_i des betrachteten Systems ermittelt und diese dann im Anschluss in eine Matrix eingesetzt, deren Rang zu bestimmen ist.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & 1 \\ 0 & -4\end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

(i) Eigenwertbestimmung bezüglich der Matrix **A**:

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{2}$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 4) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = (-1) \qquad \lambda_2 = (-4)$$

(ii) Nun wenden wir die Methode nach Hautus auf das Beispiel aus 3.1.1 an:

Es wird eine Matrix bestimmt deren Rang zu ermitteln ist:

$$\begin{bmatrix}\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{c}^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_i + 1 & -1 \\ 0 & (\lambda_i + 4) \\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

[3] Otto Föllinger: Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 8. Auflage. Hüthig Verlag, Heidelberg 1994

(iii) Die bereits bekannten Eigenwerte λ_i der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ werden in die Matrix eingesetzt und der Rang der Matrix bestimmt. Zu jedem Eigenwert λ_i muss eine Ranguntersuchung vornehmen werden.

$\underline{\lambda_1 = (-1):}$

$$rang \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$\underline{\lambda_2 = (-4):}$

$$rang \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Somit ergibt die Beobachtbarkeitsuntersuchung nach Hautus ebenfalls vollständige Beobachtbarkeit und bestätigt lediglich das Ergebnis aus 3.2.

3.5 Beobachtbarkeit nach Gilbert

Als nächstes folgt die Beobachtbarkeit nach Gilbert[4]. Ein Eingrößensystem in kanonischer Normalform[5] [1], [2], [3], [4]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_D = \boldsymbol{A}_D \cdot \boldsymbol{x}_D + \boldsymbol{b}_D \cdot u$$
$$y = \boldsymbol{c}_D^T \cdot \boldsymbol{x}_D + d_D \cdot u$$

mit einfachen Eigenwerten ist beobachtbar, wenn jedes Element $\boldsymbol{c}_{i,D}$ des zum Diagonalsystem gehörenden $\boldsymbol{c}_D$ - Vektors von null verschieden ist.

Ein Mehrgrößensystem ebenfalls in kanonischer Normalform:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_D = \boldsymbol{A}_D \cdot \boldsymbol{x}_D + \boldsymbol{B}_D \cdot \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_D \cdot \boldsymbol{x}_D + \boldsymbol{D}_D \cdot \boldsymbol{u}$$

[4] Otto Föllinger: Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 8. Auflage. Hüthig Verlag, Heidelberg 1994

[5] oder auch Diagnonalform genannt

mit einfachen Eigenwerten ist beobachtbar, wenn in jeder Spalte der C_D - Matrix mindestens ein Element von null verschieden ist.

Für die Beobachtbarkeitsanalyse nach Gilbert ist es notwendig, das zu betrachtende System in seine Eigenvektoren zerlegen zu können, da die kanonische Normalform mit einfachen Eigenwerten verwendet werden muss. Üblicherweise liegt ein System jedoch nicht in kanonischer Normalform vor und muss als erstes in die besagte Form transformiert werden. Erst danach kann eine Beobachtbarkeitsanalyse nach Gilbert vorgenommen werden. Dies soll kurz über die folgenden fünf Schritte übersichtlich dargestellt werden:

(i) Bestimmung der Eigenwerte λ_i

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

(ii) Bestimmung der Eigenvektoren $\mathbf{t}_i$

$$[(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})] \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$$

(iii) Bestimmung der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

(iv) Transformation in Diagonalform

$$x = \mathbf{T} \cdot x_D \tag{4}$$

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \tag{5}$$

$$\mathbf{B}_D = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B} \tag{6}$$

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}_D = \mathbf{D} \tag{8}$$

(v) Beurteilung der Beobachtbarkeit des zu untersuchenden Systems

3.6 Beispiel: Beobachtbarkeit nach Gilbert

Weiterhin gelte das System aus 3.2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Um die Beobachtbarkeit nach Gilbert durchführen zu können, wird zunächst die Diagnonalform des betrachteten Systems ermittelt. Dazu müssen die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und der Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$ unter Zuhilfenahme einer Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ auf Diagonalform $\{\mathbf{A}_D, \mathbf{c}_D^T\}$ transformiert werden. Zu diesem Zweck muss als erstes eine Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ ermittelt werden, welche aus den Eigenvektoren $\mathbf{t}_i$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$ besteht. Es werden die oben erwähnten Punkte (i) - (iv) ausgeführt und dann in (v) die Beobachtsbarkeit des Beispiel-Systems beurteilt:

(i) Bestimmung der Eigenwerte λ_i

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = (-1) \qquad \lambda_2 = (-4)$$

(ii) Bestimmung der Eigenvektoren $\mathbf{t}_i$

$$[(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})] \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$$

$$(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i + 1 & -1 \\ 0 & \lambda_i + 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{i,1} \\ t_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{lambda_1 = (-1)}$ ::

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{1,1} \\ t_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 \cdot t_{1,1} + (-1) \cdot t_{1,2} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 0$$

$$0 \cdot t_{1,1} + 3 \cdot t_{1,2} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 0$$

somit folgt aus diesem LGS, dass $t_{1,2} = 0$ ist. Allerdings liegt für $t_{1,1}$ kein expliziter Wert vor, sodass $t_{1,1}$ frei wählbar ist. Der Einfachheit halber wird $t_{1,1} = 1$ gesetzt, somit folgt für $\mathbf{t}_1$:

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} t_{1,1} \\ t_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = (-4):}$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{2,1} \\ t_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-3) \cdot t_{2,1} + (-1) \cdot t_{2,2} = 0 \Rightarrow -3 \cdot t_{2,1} = t_{2,2}$$
$$0 \cdot t_{1,1} + 0 \cdot t_{1,2} = 0$$

Der Einfachheit halber wird $t_{2,1} = 1$ gesetzt, daraus ergibt sich für $t_{2,2} = (-3)$ und für $\mathbf{t}_2$ folgt:

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} t_{2,1} \\ t_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(iii) Bestimmung der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Die benötigte Inverse von $\mathbf{T}$ ergibt sich zu:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(iv) Transformation in Diagonalform

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$$
$$\mathbf{B}_D = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$
$$\mathbf{C}_D = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{D}_\mathrm{D} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_\mathrm{D}^\mathrm{T} = \mathbf{c}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(v) Beurteilung der Beobachtbarkeit des Systems nach Gilbert:

$$\mathbf{A}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_\mathrm{D}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Nun wird deutlich, dass auch nach Gilbert, wie zu erwarten war, eine vollständige Beobachtbarkeit des Systems vorliegt, da jeder Eintrag von $\mathbf{c}_\mathrm{D}^\mathrm{T}$ von Null verschieden ist.

Acknowledgements

The authors would like to thank Hannover School for Nanotechnology (hsn) Leibniz University Hannover (LUH) Laboratory of Nanotechnology and Quantum Engineering (LNQE), Prof. Dr. Dr. h. c. Franz Renz Institute of Inorganic Chemistry (LUH) and Prof. Dr.-Ing. Robert Patzke University of Applied Sciences and Arts.

Literatur

[1] Otto Föllinger u. a. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 13., überarbeitete Auflage. Berlin Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2022. 452 S. ISBN: 978-3-8007-5518-9.

[2] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-52675-0 978-3-662-52676-7. DOI: 10.1007/978-3-662-52676-7. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-52676-7 (besucht am 07. 02. 2023).

[3] Carolin Penke. "Efficient Algorithms for Solving Structured Eigenvalue Problems Arising in the Description of Electronic Excitations". In: (2022). Unter Mitarb. von Universitäts-Und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt, Martin-Luther Universität und Peter Benner, xxi, 188 Seiten. DOI: 10.25673/86270. URL: https://opendata.uni-halle.de//handle/1981185920/88222 (besucht am 07. 02. 2023).

[4] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 2: Anwendungen und Konzepte für Studierende der Mathematik und Physik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2022. ISBN: 978-3-662-63638-1 978-3-662-63639-8. DOI: 10.1007/978-3-662-63639-8. URL: https://link.springer.com/10.1007/978-3-662-63639-8 (besucht am 07. 02. 2023).

[5] Serge Zacher und Manfred Reuter. *Regelungstechnik für Ingenieure*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. ISBN: 978-3-658-17631-0 978-3-658-17632-7. DOI: 10.1007/978-3-658-17632-7. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-17632-7 (besucht am 07. 02. 2023).