

Hochschule Hannover
University of Applied Sciences and Arts

Fakultät I – Elektro- & Informationstechnik
Fachgebiet Ingenieurinformatik & angewandte Mathematik
(EIT – IAM)
Fachgebiet Regelungstechnik & Mechatronik
(EIT – RTM)

Systemtheorie und Optimale Regelung

Teil V Zustandsregelung

Mohammad Beyki, M.Eng.
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Lindemann
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Kutzner

8. Februar 2023

5 Zustandsregelung

Der Einfachheit halber wird ein SISO-System betrachtet und kurz der Reglerentwurf durch Polvorgabe hergeleitet. Zwecks Wiederauffrischung der Beziehungen eines SISO-Systems wird die Visualisierung des Systems und die notwendigen Beschreibungsgleichungen aufgeführt. Abbildung 5.1 zeigt das Blockschaltbild eines SISO-Systems und darunter werden die Gleichungen aufgeführt [2], [3], [4].

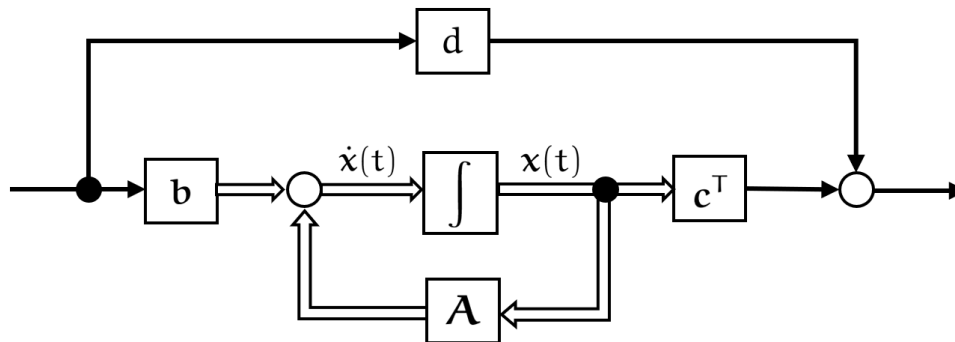


Abbildung 5.1: Zustandsraumdarstellung als BSB

$$\text{Zustandsgleichungen : } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t)$$

$$\text{Ausgangsgleichungen : } y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t)$$

5.1 Zustandsrückführung ohne Vorfilter

Die Idee der Zustandsrückführung ist, dass bei geschickter Eigenwertvorgabe (Polvorgabe) die Systemdynamik des geregelten Systems derart manipuliert wird, dass die geforderte/gewünschte Funktionalität des Gesamtsystems hervorgerufen wird [1],[2],[3],[4].

Zur Veranschaulichung der reinen Rückführung soll das nachfolgende Bild dienlich sein:

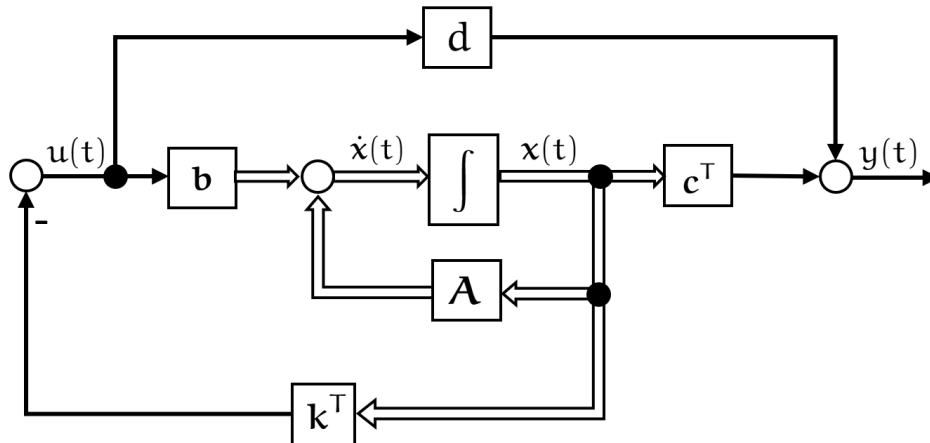


Abbildung 5.2: ZRD mit Zustandsrückführung

Die Beschreibungsgleichungen werden schrittweise aufgestellt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t)$$

$u(t)$ wird mit $u(t) = -\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t)$ ersetzt.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot (-\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t))$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot (-\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t))$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t)$$

$$\rightarrow y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) - d \cdot \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t)$$

Es folgt schließlich:

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot \mathbf{x}(t)}}$$

$$\underline{\underline{y(t) = (\mathbf{c}^T - d \cdot \mathbf{k}^T) \cdot \mathbf{x}(t)}}$$

5.2 Zustandsrückführung mit Vorfilter

Zu guter Letzt wird das Bild um eine Vorverstärkung¹ v , deren Eingang $w(t)$ ist, erweitert und schließt die Zustandsregelung ab. Durch die Erweiterung wird die geforderte stationäre Genauigkeit im Führungsfall ermöglicht. Das nachfolgende Bild soll dies kurz veranschaulichen [1],[2],[3],[4]:

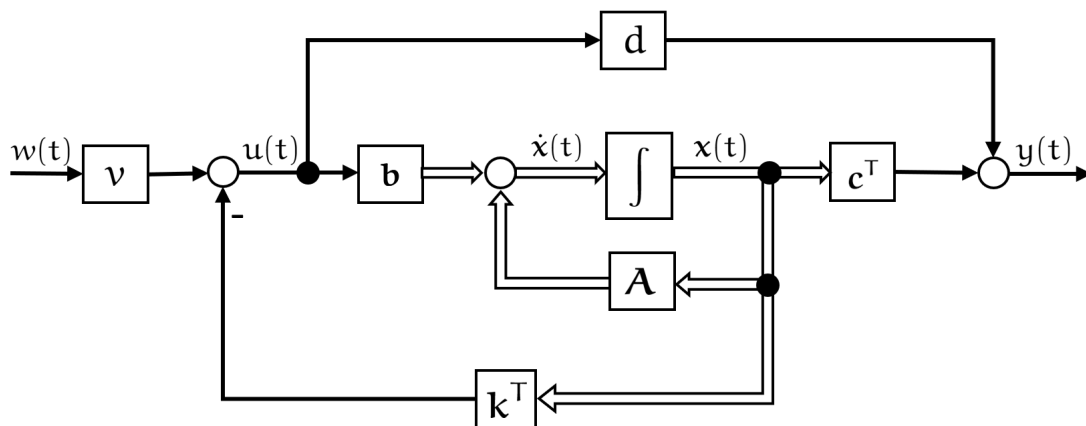


Abbildung 5.3: ZRD mit Zustandsrückführung & Vorfilter

Mit dem neuen Stellgesetz $u(t) = -\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x}(t) + v \cdot w(t)$ ergeben sich die Systembeschreibungsgleichungen zu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot v \cdot w(t)$$

$$y(t) = (\mathbf{c}^T - d \cdot \mathbf{k}^T) \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot v \cdot w(t)$$

Für die Herleitung der Vorfilterformel werden die Zustandsdifferentialgleichungen mithilfe der Laplace-Transformation in die Bildebene überführt:

$$s \cdot \mathbf{X}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) \mathbf{X}(s) + \mathbf{b} \cdot v \cdot W(s)$$

$$(s \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T)) \mathbf{X}(s) = \mathbf{b} \cdot v \cdot W(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T))^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot v \cdot W(s)$$

¹wird auch Vorfilter genannt

Nun wird das Ergebnis in die Ausgangsgleichung eingesetzt:

$$Y(s) = (\mathbf{c}^T - \mathbf{d} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot (s \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \cdot W(s) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} \cdot W(s)$$

$$Y(s) = W(s) \cdot \mathbf{v} \cdot \left((\mathbf{c}^T - \mathbf{d} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot (s \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \right)$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{v} \cdot \left((\mathbf{c}^T - \mathbf{d} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot (s \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \right)$$

Mit der Forderung $F(s=0) = 1$ folgt daraus:

$$1 = \mathbf{v} \cdot \left((\mathbf{c}^T - \mathbf{d} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot (s \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \right)$$

$$\mathbf{v} = \left((\mathbf{c}^T - \mathbf{d} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot (- (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \right)^{-1}$$

$$\mathbf{v} = \left((\mathbf{k}^T - \mathbf{d} \cdot \mathbf{k}^T) \cdot [\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \right)^{-1}$$

Zusammenfassend lassen sich zwei Formeln herausarbeiten:

a) Ohne direkten Durchgriff \mathbf{d} :

$$\mathbf{v} = [\mathbf{c}^T (\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}]^{-1}$$

b) Mit direktem Durchgriff \mathbf{d} :

$$\mathbf{v} = [(\mathbf{c}^T - \mathbf{d}\mathbf{k}^T)(\mathbf{b}\mathbf{k}^T - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{d}]^{-1}$$

Es ist ersichtlich, dass zur Bestimmung eines Vorfilters \mathbf{v} die Zustandsrückführung bekannt sein muss. Daher fokussieren sich die nachfolgenden Abschnitte auf die Bestimmung eines solchen Rückführvektors.

5.3 Berechnung der Zustandsrückführung mit der Formel von Ackermann

Nach endlicher Herleitung aller Vorgänge kommen wir auf folgende Beziehung zwischen Rückführvektor \mathbf{k}^T und der eigentlichen Beschreibungsgleichungen des SISO-Systems [1],[2],[3],[4]:

$$\mathbf{k}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot \mathbf{Q}_S^{-1} \cdot \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T \cdot \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{A})$$

Dabei ist \mathbf{t}_1^T die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S^{-1} und $\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{A})$ beinhaltet die Wunschkoeffizienten der resultierenden charakteristischen Gleichung von $\mathbf{P}_\alpha(\lambda)$ mit

$$\mathbf{P}_\alpha(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \lambda^n$$

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{A}) = \alpha_0 \cdot \mathbf{I} + \alpha_1 \cdot \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n$$

5.4 Beispiel: Zustandsrückführung

Zur Veranschaulichung folgt nun ein Beispiel für die Auslegung einer Zustandsrückführung für ein SISO-System:

Gegeben sei das System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 1] \cdot \mathbf{x}$$

Bei der Kreisfrequenz $\omega_0 = 3$ soll eine Dämpfung von $D = 0,75$ vorliegen.

(i) Steuerbarkeitsanalyse: $\text{rang}(\mathbf{Q}_S) = n$

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\mathbf{Q}_S) = 2$$

Da voller Rang vorliegt, ist das System vollständig steuerbar!

(ii) Zustandsrückführung auslegen:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T \cdot [\alpha_0 \cdot \mathbf{I} + \alpha_1 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^2]$$

Aus der Dämpfungsbedingung ergibt sich:

$$s^2 + \underbrace{2 \cdot D \cdot \omega_0}_{\alpha_1=4,5} \cdot s + \underbrace{(\omega_0)^2}_{\alpha_0=9} = s^2 + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = 9, \quad \alpha_1 = 4,5$$

Aus der Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S lässt sich leicht die Inverse \mathbf{Q}_S^{-1} berechnen und deren letzte Zeile ergibt \mathbf{t}_1^T :

$$\mathbf{Q}_S^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t}_1^T = [1 \quad -1]$$

Nun kann der Rückführvektor \mathbf{k}^T bestimmt werden:

$$\mathbf{k}^T = [1 \quad -1] \cdot \left[9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4,5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right]$$

$$\mathbf{k}^T = [1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 5,5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = [5,5 \quad -4]$$

5.5 PI-Zustandsregler

Nun soll der Fall eines überlagerten PI-Zustandsreglers beleuchtet werden. Dies setzt eine Zustandsrückführung \mathbf{K}_x voraus und erweitert das gesamte Bild um einen PI-Regler [2],[3],[4].

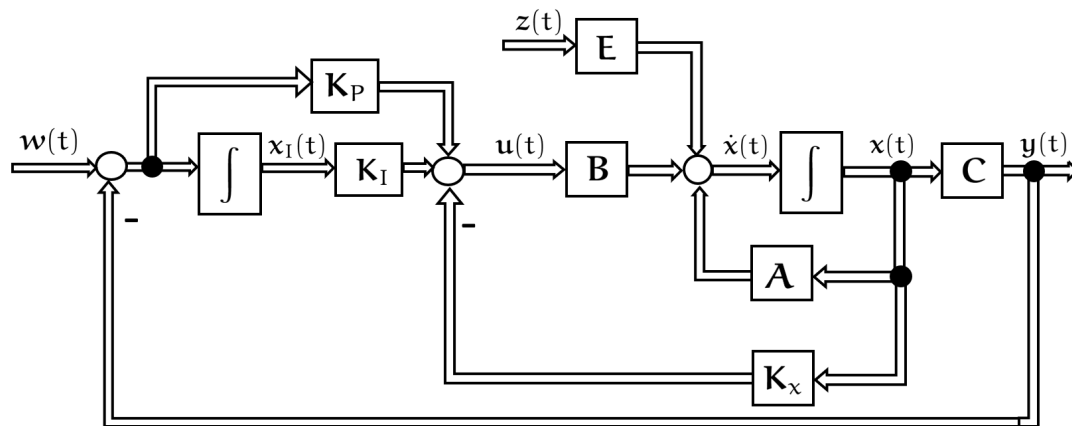


Abbildung 5.4: Zustandsregler und Zustandsrückführung

Das ursprüngliche System im Zustandsraum

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t)$$

wird um eine Zustandsrückführung \mathbf{K}_x mit überlagertem PI-Regler mit den Matrizen \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_I erweitert und es folgt für das geschlossene System:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_I \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_I \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{u}$$

Das erweiterte Stellgesetz ergibt sich daraus zu:

$$\mathbf{u} = -[\tilde{\mathbf{K}} \quad \mathbf{K}_I] \mathbf{x}_e \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_P \cdot \mathbf{C}$$

Mit der Forderung nach stationärer Genauigkeit im Führungsfall ergibt sich für die Matrix \mathbf{K}_P :

$$\mathbf{K}_P = -(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})^{-1}$$

5.6 Beispiel: PI-Zustandsregler

Um die oben aufgeführten Formeln verständlicher zu gestalten, wird nun ein Beispiel zur Veranschaulichung betrachtet. Der besseren Übersicht wegen soll es sich um ein SISO-System handeln, sodass sich einige Matrizen zu Vektoren und einige Vektoren zu Skalaren vereinfachen.

Gegeben sei das folgende System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0,5] \mathbf{x}$$

Das erweiterte System hat folgende Form:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -0,5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_e + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Zunächst wird das System auf Steuerbarkeit untersucht:

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}_e \quad \mathbf{A}_e \mathbf{b}_e \quad \mathbf{A}_e^2 \mathbf{b}_e]$$
$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -0,5 & -2,5 \end{bmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix beträgt $\text{rang}(\mathbf{Q}_S) = 3$ und zeigt somit vollständige Steuerbarkeit nach Kalman auf. Die Pole des rückgeführten Systems sollen alle bei $s_{p,i} = -1$ liegen. Sie lassen sich leicht nach der Formel von Ackermann setzen mit:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_{R,1}^T \cdot \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{A}_e)$$

Bekanntlicherweise benötigen wir die letzte Zeile der invertierten Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_S^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -\frac{1}{4} & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t}_{R,1}^T = [-\frac{1}{4} \quad 0 \quad -1]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{A}_e) &= [p_0\mathbf{I} + p_1\mathbf{A}_e + p_2\mathbf{A}_e^2 + \mathbf{A}_e^3] \\ \Rightarrow (s-1)^3 &= s^3 + \underbrace{3}_{p_2}s^2 + \underbrace{3}_{p_1}s + \underbrace{1}_{p_0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}^T = \left[-\frac{1}{4} \quad 0 \quad -1\right] \cdot [1 \cdot \mathbf{I} + 3 \cdot \mathbf{A}_e + 3 \cdot \mathbf{A}_e^2 + \mathbf{A}_e^3]$$

Die Zustandsrückführung ergibt sich nun zu:

$$\mathbf{k}^T = [(\tilde{\mathbf{k}})^T \quad -k_I] = \left[\frac{17}{4} \quad 6 \quad -1\right]$$

$$(\tilde{\mathbf{k}})^T = \mathbf{k}_x^T + k_p \cdot \mathbf{c}^T$$

k_I ist nun der Faktor, mit dem der Ausgang des Integrators auf die Stellgröße wirkt.

$$k_I = 1$$

k_p ist der Faktor, der den stationären Anteil der benötigten Stellgröße zu Beginn eines Sollwertsprunges über den P-Anteil des PI-Reglers liefert.

$$k_p = -(\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b})^{-1} = 6$$

Als letztes ist an dieser Stelle die Zustandsrückführung \mathbf{k}_x^T der messbaren bzw. beobachtbaren Zustandsgrößen zu erwähnen.

$$\mathbf{k}_x^T = (\tilde{\mathbf{k}})^T - k_p \cdot \mathbf{c}^T = \left[-\frac{7}{4} \quad 3\right]$$

Acknowledgements

The authors would like to thank Hannover School for Nanotechnology (hsn) Leibniz University Hannover (LUH) Laboratory of Nanotechnology and Quantum Engineering (LNQE), Prof. Dr. Dr. h. c. Franz Renz Institute of Inorganic Chemistry (LUH) and Prof. Dr.-Ing. Robert Patzke University of Applied Sciences and Arts.

Literatur

- [1] “BUCHBESPRECHUNGEN”. In: *at - Automatisierungstechnik* 43.8 (1. Aug. 1995), S. 391–393. ISSN: 2196-677X, 0178-2312. DOI: 10.1524/auto.1995.43.8.391. URL: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1524/auto.1995.43.8.391/html> (besucht am 07.02.2023).
- [2] Otto Föllinger u. a. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 13., überarbeitete Auflage. Berlin Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2022. 452 S. ISBN: 978-3-8007-5518-9.
- [3] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-52675-0 978-3-662-52676-7. DOI: 10.1007/978-3-662-52676-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-52676-7> (besucht am 07.02.2023).
- [4] Serge Zacher und Manfred Reuter. *Regelungstechnik für Ingenieure*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. ISBN: 978-3-658-17631-0 978-3-658-17632-7. DOI: 10.1007/978-3-658-17632-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-17632-7> (besucht am 07.02.2023).