

Hochschule Hannover
University of Applied Sciences and Arts

Fakultät I – Elektro- & Informationstechnik
Fachgebiet Ingenieurinformatik & angewandte Mathematik
(EIT – IAM)
Fachgebiet Regelungstechnik & Mechatronik
(EIT – RTM)

Systemtheorie und Optimale Regelung

Teil I Zustandsraumdarstellung

Mohammad Beyki, M.Eng.
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Lindemann
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Kutzner

8. Februar 2023

1 Einführung in die Zustandsraumdarstellung

Die Eigenwerttheorie¹ ermöglicht einen tieferen Einblick in das Systemverhalten von dynamischen Prozessen und Systemen. Dazu wird unter anderem in der Regelungstechnik und Systemtheorie die Zustandsraumdarstellung² bei Differentialgleichungen genutzt und zur Lösungsfindung im graphischen sowie analytischen Bereich verwendet.

1.1 System von Differentialgleichungen

Die Regelungstechnik beschäftigt sich, wie der Name bereits vermuten lässt, mit der Regelung von Systemen³. Zur Beschreibung eines Systems wird ein mathematisches Modell zugrunde gelegt, welches meist mittels Differentialgleichungen beschrieben wird. Diese DGLn haben oft eine hohe Ordnung und sind schwierig und aufwendig zu lösen. Das Ziel der Zustandsraumdarstellung ist es besagte DGLn in eine Reihe zusammenhängender DGLn erster Ordnung zu überführen. Aus einer oder mehreren Differentialgleichungen höherer Ordnung werden auf diese Weise mehrere DGLn erster Ordnung. Sind besagte DGL-Systeme linear und zeitinvariant, werden sie LTI⁴-Systeme genannt und wie folgt dargestellt [1], [2], [6]:

Single Input Single Output (SISO):

$$\text{Zustandsdifferentialgleichungen : } \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \quad (1)$$

$$\text{Ausgangsgleichungen : } y(t) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t) \quad (2)$$

Statt Unterstriche zu verwenden, werden die Buchstaben auch fett gedruckt:

$$\text{Zustandsdifferentialgleichungen : } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t) \quad (3)$$

$$\text{Ausgangsgleichungen : } y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t) \quad (4)$$

Systemmatrix : \mathbf{A} , Eingangsvektor : \mathbf{b} , Zustandsvektor : $\mathbf{x}(t)$

Durchgangswert : d , Ausgangsvektor : \mathbf{c}^T , Ausgang : $y(t)$

¹ Eigenwert: EW

² Das Wort Zustandsraumdarstellung wird häufig mit ZRD abgekürzt

³ physikalisches, chemisches, wirtschaftliches usw.

⁴ LTI: linear timeinvariant

Multi Input Multi Output (MIMO):

$$\text{Zustandsdifferentialgleichungen : } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (5)$$

$$\text{Ausgangsgleichungen : } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

Systemmatrix : \mathbf{A} , Eingangsmatrix : \mathbf{B} , Zustandsvektor : $\mathbf{x}(t)$

Durchgangsmatrix : \mathbf{D} , Ausgangsmatrix : \mathbf{C} , Ausgaenge : $\mathbf{y}(t)$

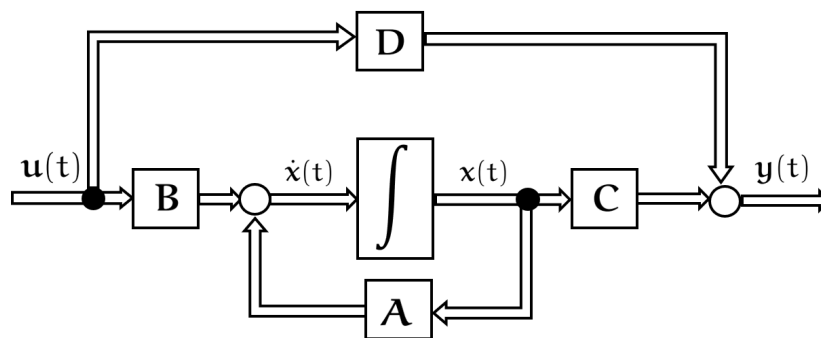


Abbildung 1.1: ZRD als Blockschaltbild

Sollen nun noch Anfangswerte berücksichtigt werden, muss das Bild um einen Anfangszustandsvektor \mathbf{x}_0 erweitert werden:

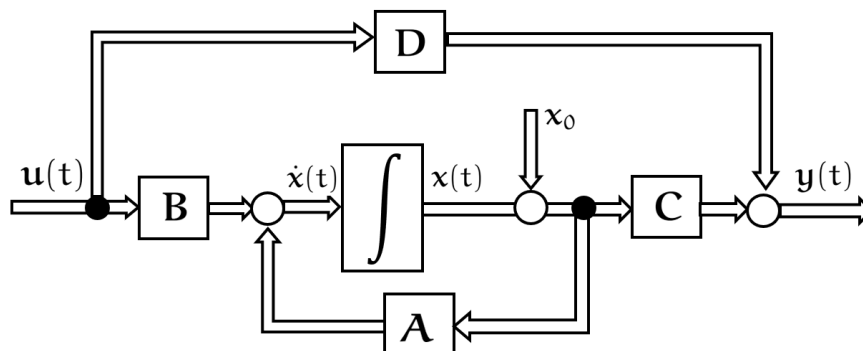


Abbildung 1.2: ZRD als Blockschaltbild mit Anfangswerten

1.1.1 Beispiel 1: LTI-System 2. Ordnung

Es folgt nun ein Beispiel zu einem LTI-System 2. Ordnung⁵:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \cdot \dot{x}(t) + a_0 \cdot x(t) = \gamma \cdot u(t)$$

Wir wählen $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ und somit auch $\dot{x}_2 = \ddot{x}$. Es folgt somit als System von DGLn erster Ordnung:

$$(I) \dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot u$$

$$(II) \dot{x}_2 = -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 + \gamma \cdot u$$

Der Ausgang y des Systems soll beschrieben werden durch:

$$y = x_1$$

In Matrix-Schreibweise folgt dann:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Beispiel 2: LTI-Systems 2. Ordnung

Nun ein weiteres Beispiel, jedoch dieses Mal mit Zahlenwerten für a_1 , a_0 und γ :

$$\ddot{x}(t) = 0.2 \cdot \dot{x}(t) - 3 \cdot x(t) + 4 \cdot u(t)$$

Wir wählen $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ und somit auch $\dot{x}_2 = \ddot{x}$. Es folgt somit als System von DGLn erster Ordnung:

$$(I) \dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot u$$

$$(II) \dot{x}_2 = -3 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 4 \cdot u$$

In Matrix-Schreibweise folgt dann:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

⁵ Die Systemordnung wird häufig mit n abgekürzt, hier $n = 2$

1.2 Eigenwerte der Systemmatrix

Die EWs λ_i bezüglich der Systemmatrix \mathbf{A} kommen in der lineare Algebra und folglich auch in der Systemtheorie vielseitig zur Anwendung. Die zwei wichtigsten Gründe zur Bestimmung der EWs sind [1], [2], [4], [5]:

- (i) λ_i gibt Auskunft über die Stabilität eines Systems
- (ii) Oft werden Systeme in andere Darstellungsformen transformiert und dazu bedient man sich der Eigenvektoren⁶, die nur mittels der EWs bestimmt werden können

Die Lösung folgender Gleichung liefert die gesuchten EWs eines zugehörigen Systems:

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (7)$$

Wobei \mathbf{I} die entsprechende Einheitsmatrix ist, welche der Dimension von \mathbf{A} angepasst ist.

1.3 Eigenwerte einer 2 x 2 - Systemmatrix

Gegeben: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix}$

Es folgt für die EW-Bestimmung:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= 0 \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - \mathbf{a}_{11} & -\mathbf{a}_{12} \\ -\mathbf{a}_{21} & \lambda - \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} = (\lambda - \mathbf{a}_{11}) \cdot (\lambda - \mathbf{a}_{22}) - \mathbf{a}_{21} \cdot \mathbf{a}_{12} = 0 \\ &= \lambda^2 - (\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}) \cdot \lambda + \mathbf{a}_{11} \cdot \mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{21} \cdot \mathbf{a}_{12} = 0 \end{aligned}$$

Die EW berechnen sich über die pq-Formel zu:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22})}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{(\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22})^2 - 4 \cdot (\mathbf{a}_{11} \cdot \mathbf{a}_{22} + \mathbf{a}_{21} \cdot \mathbf{a}_{12})}}{2}$$

⁶Eigenvektoren werden häufig auch mit EV abgekürzt

1.3.1 Beispiel für EW einer 2 x 2 - Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda - 0.2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot (\lambda - 0.2) + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 0.2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.1 + j \cdot \frac{\sqrt{299}}{10}$$

$$\lambda_2 = 0.1 - j \cdot \frac{\sqrt{299}}{10}$$

1.4 Eigenwerte und Stabilität

Das Ergebnis der EW-Bestimmung führt auf das nächste Thema dieses Werkes. Es handelt sich dabei um die Stabilität von Systemen. Im Grunde kann zur Vereinfachung zunächst alles darauf zurückgeführt werden, dass die linke und rechte Halbebene betrachtet wird [1], [2], [3], [5], [6].

- (i) Liegen alle EWs eines Systems in der **linken Halbebene**⁷ im komplexen Zahlenraum, so handelt es sich bei kontinuierlichen Systemen um **absolute Stabilität**.
- (ii) Liegt mindestens ein EW in der **rechten HE** ist das System **instabil**
- (iii) Liegen fast alle EWs, bis auf einer, in der linken HE und dieser eine restliche EW im Ursprung ($\lambda = 0$) ist das System **grenzstabil**. Kommt ein mehrfacher EW im Ursprung vor, ist das System auch instabil.

Außerdem handelt es sich um schwingungsfähige Systeme, wenn konjugiert komplexe EWs entstehen.

⁷ Halbebene: HE

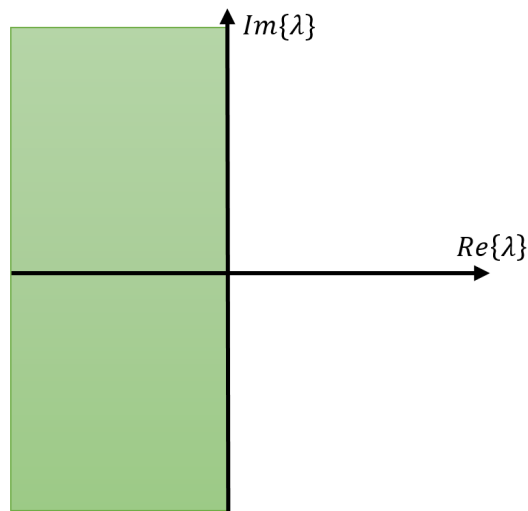
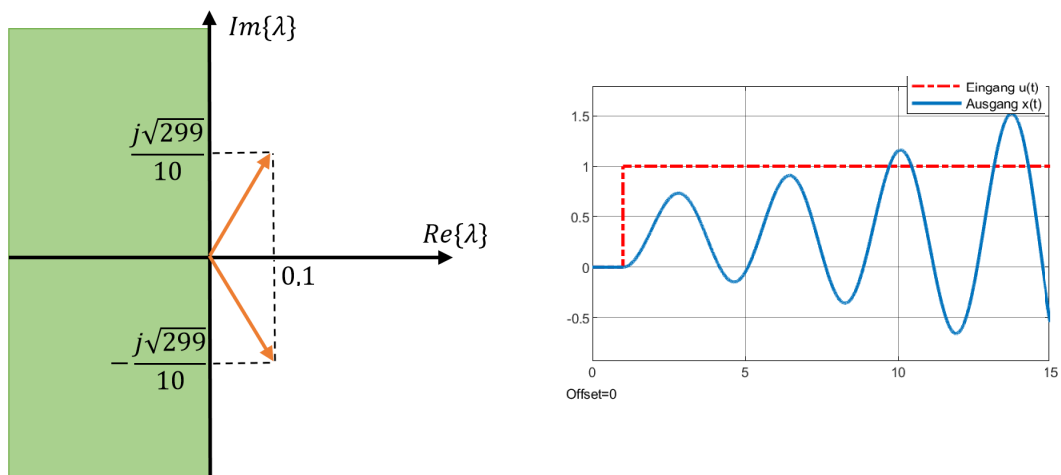


Abbildung 1.3: Eigenwertebene

1.5 Beispiel: Stabilität eines Systems I

Bezüglich des zahlenmäßig angegebenen LTI-Systems, bedeutet dies, dass das System instabil und schwingungsfähig ist. Wird die Sprungantwort hinzugezogen wird eine aufklingende Schwingung ersichtlich. Sie resultiert aus den komplex konjugierten EWs (λ_1, λ_2) mit positivem Realteil $Re\{\lambda_i\} > 0$.



1.6 Beispiel: Stabilität eines Systems II

Nun ein Beispiel für eine gedämpfte Schwingung:

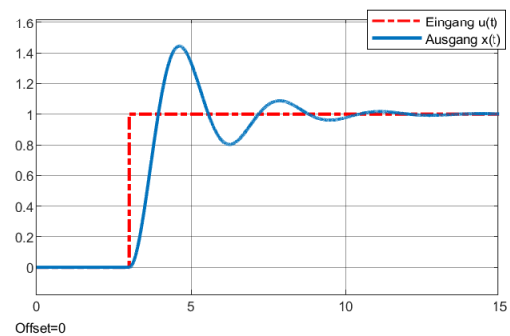
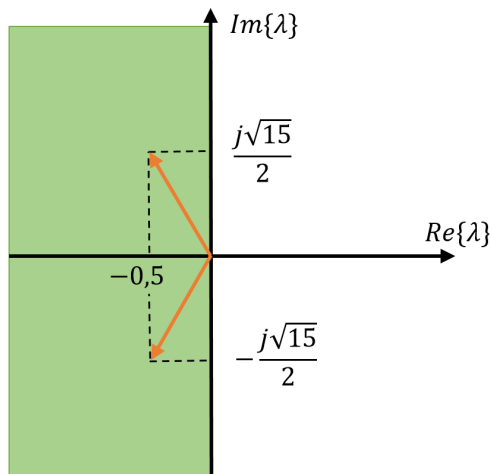
$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) - 4 \cdot x(t) + 4 \cdot u(t)$$

Wir wählen wieder $x = x_1$, $\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$ und $\ddot{x} = \dot{x}_2$. In Matrix-Schreibweise folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

Für die EW folgt daraus: $\lambda_{1,2} = \frac{(-1)}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}$.



Es handelt sich um eine abklingende Schwingung. Sie resultiert aus den komplex konjugierten EWs (λ_1, λ_2) mit negativem Realteil $Re\{\lambda_i\} < 0$.

1.7 Beispiel: Stabilität eines Systems III

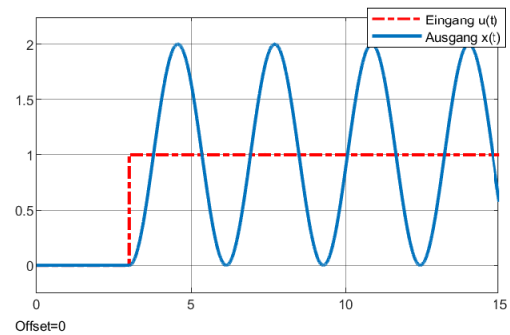
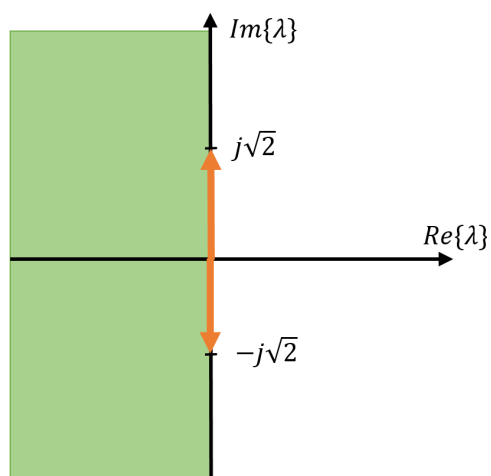
Als letztes Beispiel eine Dauerschwingung:

$$\ddot{x}(t) = -2 \cdot x(t) + 4 \cdot u(t)$$

Wir wählen wieder $x = x_1$, $\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$ und $\ddot{x} = \dot{x}_2$. In Matrix-Schreibweise folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot u, \quad y = [1 \ 0] \cdot \mathbf{x}$$

Für die EW folgt daraus: $\lambda_{1,2} = \pm j \cdot \sqrt{2}$



Es handelt sich um eine Dauerschwingung, die aus konjugiert komplexen und grenzstabilen EWs folgt.

Acknowledgements

The authors would like to thank Hannover School for Nanotechnology (hsn) Leibniz University Hannover (LUH) Laboratory of Nanotechnology and Quantum Engineering (LNQE), Prof. Dr. Dr. h. c. Franz Renz Institute of Inorganic Chemistry (LUH) and Prof. Dr.-Ing. Robert Patzke University of Applied Sciences and Arts.

Literatur

- [1] Otto Föllinger u. a. *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 13., überarbeitete Auflage. Berlin Offenbach: VDE Verlag GmbH, 2022. 452 S. ISBN: 978-3-8007-5518-9.
- [2] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-52675-0 978-3-662-52676-7. DOI: 10.1007/978-3-662-52676-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-52676-7> (besucht am 07.02.2023).
- [3] Prof. Dr. Jan Lunze. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-60745-9 978-3-662-60746-6. DOI: 10.1007/978-3-662-60746-6. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-60746-6> (besucht am 07.02.2023).
- [4] Carolin Penke. “Efficient Algorithms for Solving Structured Eigenvalue Problems Arising in the Description of Electronic Excitations”. In: (2022). Unter Mitarb. von Universitäts-Und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt, Martin-Luther Universität und Peter Benner, xxi, 188 Seiten. DOI: 10.25673/86270. URL: <https://opendata.uni-halle.de/handle/1981185920/88222> (besucht am 07.02.2023).
- [5] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 2: Anwendungen und Konzepte für Studierende der Mathematik und Physik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2022. ISBN: 978-3-662-63638-1 978-3-662-63639-8. DOI: 10.1007/978-3-662-63639-8. URL: <https://link.springer.com/10.1007/978-3-662-63639-8> (besucht am 07.02.2023).
- [6] Serge Zacher und Manfred Reuter. *Regelungstechnik für Ingenieure*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. ISBN: 978-3-658-17631-0 978-3-658-17632-7. DOI: 10.1007/978-3-658-17632-7. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-17632-7> (besucht am 07.02.2023).