L1 Leserbrief von Prof. Dr. Hartmut Grabinski[1], Prof. Dr. Erhart Kunze[2] und Prof. Dr. Fred Wiznerowicz[2]

[1] Leibniz Universität Hannover, [2] Hochschule Hannover

Antwort auf den Leserbrief von Prof. Dr. Martin Poppe (erschienen im ETG journal 01/2022)

Hat der Poynting-Vektor auch im statischen Fall eine physikalische Bedeutung?

In seinem Leserbrief im ETG *journal* 01/2022 auf Seite 74 gibt Herr Kollege Poppe weitere interessante Hinweise zu unserem Aufsatz „Wie gelangt die elektrische Energie zum Verbraucher" im ETG *journal* 02/2021. Abschließend stellt er – sinngemäß – die Frage, ob die Interpretation des Poynting-Vektors $\vec{S}$ zur Beschreibung eines Energietransports in Richtung von $\vec{S}$ auch dann zulässig sei, wenn sich beispielsweise ein geladener Kondensator innerhalb einer konstant durchströmten Spule befindet. In diesem Fall sind nämlich elektrisches und magnetisches Feld voneinander unabhängig, wobei eigentlich zu berücksichtigen ist, dass es während des Einbringens des Kondensators in das Magnetfeld stets (!) zu einer Wechselwirkung zwischen beiden Feldtypen kommt. Es ergeben sich dann geschlossene Feldlinien des Poynting-Vektors, also ein kreisender Energiefluss ohne externe Wirkung.

Um die Antwort vorweg zu nehmen: Ja, auch im Fall statischer Felder ist die Betrachtung des Poynting-Vektors $\vec{S}$ nicht nur richtig und sinnvoll, sondern sogar notwendig, wie im Folgenden schrittweise gezeigt wird.

Die vom Kollegen Poppe hier gestellte, naheliegende Frage wird in der Tat bereits seit Jahrzehnten immer wieder diskutiert, wobei es zu unterschiedlichen Auffassungen gekommen ist. So wird gelegentlich auch heute noch die auch in Lehrbüchern vertretene These zitiert, dass dann der Poynting-Vektor in statischen Feldern eben nicht mehr sinnvoll anwendbar sei, und in der Tat ist es so, dass der Poynting-Vektor bei seiner Ableitung normalerweise nicht einzeln auftritt, sondern im Zusammenhang mit einem Flächenintegral über eine geschlossene Hüllfläche $A_{\mathrm{Hüll}}$, also in der Form

$$\oiint_{A_{\mathrm{Hüll}}} \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{A}\,.$$

Wenn nun aber die Feldlinien von $\vec{S}$ in sich geschlossen sind, gehen in die Hüllfläche stets ebenso viele Feldlinien hinein wie hinaus. Mit anderen Worten: Das Integral ist dann immer Null, und man könnte also vermeintlich auf den Poynting-Vektor verzichten.

Es kommt noch hinzu: Wenn man zu irgendeinem Poynting-Vektor $\vec{S}$ ein beliebiges Vektorfeld hinzu addiert, welches geschlossen Feldlinien aufweist, so hätte dieses dann neue Vektorfeld überhaupt keinen Einfluss auf obiges Integral. Das hat in der Folge dazu geführt, dass manche Wissenschaftler der Größe $\vec{S}$ selbst jegliche physikalische Realität abgesprochen haben, weil $\vec{S}$ eben nicht eindeutig sei. Allerdings weist beispielsweise schon Simonyi *[Simo]* unter Hinweis auf relativistische Betrachtungen darauf hin, dass diese Auffassung so nicht stimmen könne.

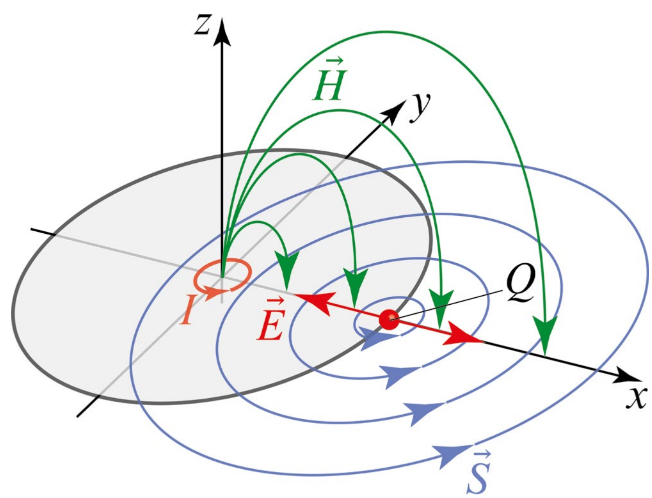

Bild 1: Scheibe aus Kunststoff mit einer vom Strom I durchströmten, supraleitenden Leiterschleife und einer Punktladung Q. Das elektrische Feld der Punktladung ist andeutungsweise nur durch zwei Feldlinien dargestellt. Es hat die elektrische Feldstärke $\vec{E}$. Dabei weist $\vec{E}$ kugelsymmetrisch von der Punktladung fort. Das magnetische Feld der Leiterschleife hat die magnetische Feldstärke $\vec{H}$. Feldlinien des magnetischen Feldes sind im ersten Quadranten der x-z-Ebene dargestellt. Feldlinien des Poynting-Vektors $\vec{S}$ sind in der x-y-Ebene teilweise eingezeichnet.

Um nun die physikalische Realität des Poynting-Vektors zu zeigen, ohne explizit mit den erwähnten, aber doch recht unanschaulichen relativistischen Betrachtungen hantieren zu müssen, hat Feynman ein einfaches Gedankenexperiment formuliert, welches unter dem Begriff „Feynman's Disc Paradox" in die Literatur eingegangen ist *[Feyn]*. Eine quantitative Behandlung dieses (dort noch weiter vereinfachten) Paradoxons stammt von Aguirregabiria et al. *[Agui]*. Sie soll hier qualitativ wiedergegeben werden.

Das Bild zeigt eine Kunststoffscheibe, die in der x-y-Ebene liegt und um die z-Achse rotieren kann. In der Mitte der Scheibe befindet sich eine sehr kleine, supraleitende Leiterschleife, die vom konstanten Strom I durchflossen wird. Auf dem Rand der Scheibe ist eine Punktladung Q angebracht. Alles befindet sich in Ruhe. Das magnetische Feld der Leiterschleife ergibt zusammen mit dem elektrischen Feld der Punktladung überall im Raum das Feld eines Poynting-Vektors $\vec{S}$, dessen Feldlinien alle in sich geschlossen sind. Im Bild sind Feldlinien von $\vec{S}$ in der x-y-Ebene teilweise eingezeichnet. Feynman *[Feyn]* schreibt: „Der Poynting-Vektor zeigt hier also einen Energiestrom, der ständig im Kreis fließt. Nirgends tritt eine Änderung der Energie auf. Alles, was in ein Volumen hineinfließt, fließt auch wieder hinaus. Also gibt es in diesem sogenannten statischen Fall eine Zirkulation der Energie."

Nun wird die Situation dahingehend verändert, dass sich die Leiterschleife langsam erwärmen möge, so dass die Supraleitung verschwindet. Strom I und magnetische Feldstärke $\vec{H}$ streben also gegen Null und damit auch $\vec{S}$. Dabei wird, wie aus dem Induktionsgesetz bekannt, ein elektrisches Feld der Stärke $\vec{E_\mathrm{I}}$ induziert, dessen Feldlinien als konzentrische Kreise um die z-Achse verlaufen. $\vec{E_\mathrm{I}}$ bewirkt nun eine Kraft $\vec{F} = Q\,\vec{E_\mathrm{I}}$ auf die Punktladung und ist gemäß der Lenzschen Regel so gerichtet, dass sie die Punktladung Q und damit auch die Scheibe in Rotation versetzt und zwar bezüglich der z-Achse rechtswendig. Die Anordnung besitzt dann also den Drehimpuls $\vec{L}$. Gemäß dem Satz von der Erhaltung des Drehimpulses muss dieser Drehimpuls aber auch schon vorher vorhanden gewesen sein, als sich die Anordnung noch in Ruhe befand. Tatsächlich lässt sich zeigen (da fängt dann das hier nicht erläuterte Relativistische an), dass dieser Drehimpuls vorher im Poynting-Vektor „versteckt" war. Der Poynting-Vektor liefert nämlich nicht nur die Energieströmung, sondern, wenn man ihn durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit c teilt, auch die elektromagnetische Impulsdichte $\overrightarrow{p_V}$ gemäß

$$\overrightarrow{p_V} = \vec{S}/c^2 ,$$

also einen Impuls pro Volumen, woraus sich der differentielle Impuls $\mathrm{d}\vec{p}$ eines Volumenelementes $\mathrm{d}V$ dann zu $\mathrm{d}\vec{p} = \overrightarrow{p_V}\,\mathrm{d}V$ ergibt. Hiermit lässt sich dann – ganz formal nach den bekannten Gesetzen der Mechanik – durch Integration schließlich der offenbar schon vorher im elektromagnetischen Feld enthaltene Drehimpuls $\overrightarrow{L_\mathrm{Feld}}$ des Feldes errechnen, der in der Tat identisch mit dem zuvor erhaltenen mechanischen Drehimpuls $\vec{L}$ ist. Der Drehimpulserhaltungssatz ist also – wie es sein muss – in der Tat erfüllt.

Zusammenfassend ergibt sich also auf die eingangs gestellte Frage folgende Antwort: Auch im statischen Fall, also bei rein kreisendem Energiefluss, ist die Betrachtung des Poynting-Vektors $\vec{S}$ nicht nur sinnvoll, sondern sogar erforderlich. Das Gedankenexperiment sägt also keineswegs – wie man vielleicht zunächst glauben könnte – an den Grundfesten der Energieerhaltung und der Impulserhaltung, sondern die Betrachtung des Poynting-Vektors ist hierfür zwingend notwendig.

Literatur

[Simo] Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.

[Feyn] Feynman, R. P.: Feynman-Vorlesungen über Physik. Die Kapitel 17.4 und 27.6. sind unter derselben Nummer mit demselben Inhalt in verschiedenen Auflagen von etwa 1987 bis 2015 enthalten, z. B. in De Gruyter 2015.

[Agui] Aguirregabiria, J. M.; Hernández, A.: The Feynman paradox revisited. Eur. J. Phys. 2 (1981), S. 168–170.